電磁気学

040813F 志村晴季

平成 13 年 4 月 30 日

目 次

第 1 章　introduction **3**
1.1　自然界の基本的な力 3
1.2　重要な方程式 (一部) 3

第 2 章　静電場 **5**
2.1　クーロンの法則 5
2.2　電場 5

第 3 章　ガウスの法則 **9**
3.1　積分型のガウスの法則 9
3.2　ガウスの定理 (発散定理) 10
3.3　微分型のガウスの法則 11
3.3.1　ガウスの法則を用いた計算例 12

第 4 章　静電ポテンシャル・静電エネルギー **16**
4.1　はじめに 16
4.2　ストークスの定理 16
4.3　静電場の渦なしの法則 17
4.4　静電ポテンシャル 18
4.5　ポアソンの方程式 19
4.5.1　ポアソンの方程式を用いた計算例 20
4.6　静電エネルギー 25

第 5 章　電流 **28**
5.1　電流と電荷保存則 28
5.2　オームの法則 29
5.3　ジュールの法則 30

第 6 章　電流と静磁場 **32**
6.1　アンペールの力とローレンツ力 32
6.2　電流の作る磁場 ~ ビオ・サヴァールの法則 33
6.2.1　ビオ・サヴァールの法則を用いた計算例 34

第 7 章　アンペールの法則とベクトルポテンシャル　37
7.1　アンペールの法則 37
7.2　ベクトルポテンシャル 39
7.3　磁場中の電流が受ける力 40

第 8 章　時間的に変化する電磁場　42
8.1　ファラデーの電磁誘導の法則 42

第 9 章　マクスウェルの方程式と電磁波　46
9.1　アンペール・マクスウェルの方程式 46
9.2　電磁波 47

第1章　introduction

以下で扱う単位系はすべてSI単位系に基づく (長さ:m, 質量:kg, 時間:sec, 電流:A, 温度:K, 物質量:mol, 光度:cd etc.)。

1.1　自然界の基本的な力

$$\begin{cases} \text{重力} \\ \text{電磁気力} \\ \text{強い力} \\ \text{弱い力} \end{cases}$$

この講義では、この電磁気力を扱う。

1.2　重要な方程式 (一部)

Maxwell方程式

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{E}(\vec{x},t) = \dfrac{\rho(\vec{x},t)}{\varepsilon_0} \\ \mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{x},t) + \dfrac{\partial \vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{x},t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}(\vec{x},t) \\ \mathrm{div}\vec{B}(\vec{x},t) = 0 \end{cases}$$

ただし、
$\vec{E}(\vec{x},t)$:電場, $\vec{B}(\vec{x},t)$:磁場, $\rho(\vec{x},t)$:電荷密度, $\vec{j}(\vec{x},t)$:電流密度, ε_0:真空の誘電率, μ_0:真空の透磁率, $c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$

他に、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x},t) + \mathrm{div}\vec{j}(\vec{x},t) = 0 \quad \text{連続の方程式}$$

$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{x},t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x},t))$　ローレンツ力 (電荷 q をもつ粒子の座標が$\vec{x}$)

< 補足 : ベクトル解析の記号 $etc.$ >

$$\begin{cases} \text{スカラー場}\quad \text{空間各点において、スカラー量を持つ場。} f(\vec{x}) \\ \text{ベクトル場}\quad \text{空間各点において、ベクトル量を持つ場。} \vec{f}(\vec{x}) \end{cases}$$

微分演算子 ∇(ナブラ)

$$\nabla \overset{def.}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathrm{grad}\vec{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A\vec{x}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A\vec{x}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial A\vec{x}}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla \vec{A}(\vec{x}) \\ \mathrm{div}\vec{A}(\vec{x}) = \dfrac{\partial}{\partial x}A_x + \dfrac{\partial}{\partial y}A_y + \dfrac{\partial}{\partial z}A_z = \nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}) \\ \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}A_z - \dfrac{\partial}{\partial z}A_y \\ \dfrac{\partial}{\partial z}A_x - \dfrac{\partial}{\partial x}A_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x}A_y - \dfrac{\partial}{\partial y}A_x \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}) \end{cases}$$

$*\mathrm{div}$ だけが <u>スカラー量</u> であることに注意 (内積だから)!!

第2章　静電場

2.1　クーロンの法則

図 2.1 のようなとき、2 が 1 が及ぼす力 $\vec{F_{12}}$ は、

$$\vec{F_{12}} = kq_1q_2\frac{\vec{x_1} - \vec{x_2}}{|\vec{x_1} - \vec{x_2}|^3} = kq_1q_2\frac{\vec{e_{12}}}{r_{12}^2}$$

逆も同様。ここで、

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = 8.987551783681764 \times 10^9 \left[\mathrm{Nm^2/A^2s^2}\right]$$

2.2　電場

電荷 q にクーロン力 $\vec{F}$ が及ぶとき、電場は $\vec{E}(\vec{x})$。

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum kq_i\frac{x - x_i}{|x - x_i|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\frac{\vec{x} - \vec{x_i}}{|\vec{x} - \vec{x_i}|^3}$$

ちなみに、立体的に連続分布した電荷については、

$$\begin{cases} \text{直交座標} & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \rho(\vec{x_i})\dfrac{\vec{x} - \vec{x_i}}{|\vec{x} - \vec{x_i}|^3}dxdydz \\ \text{円筒座標} & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \rho(\vec{x_i})\dfrac{\vec{x} - \vec{x_i}}{|\vec{x} - \vec{x_i}|^3}r^2\sin\theta dr d\phi d\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \rho(\vec{x_i})\dfrac{\vec{x} - \vec{x_i}}{|\vec{x} - \vec{x_i}|^3}r^2 dr d\phi d(\cos\theta) \end{cases}$$

図 2.2 を見れば単位体積のことは分かるであろう (分かるよね?)。
また、$\rho(\vec{x_i}) = \dfrac{q_i}{dV}$: 電荷密度

$< E$ の計算の例 $>$
簡単な例で考えよう。半径 R の球に一様な電荷が分布しているとする。
すなわち、

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \rho_0 = \dfrac{3}{4\pi R^3}q & (|\vec{x}| < R) \\ 0 & (|\vec{x}| > R) \end{cases}$$

$q_1, \dot{\vec{x_1}}$　　$q_2, \dot{\vec{x_2}}$

図 2.1: クーロンの法則

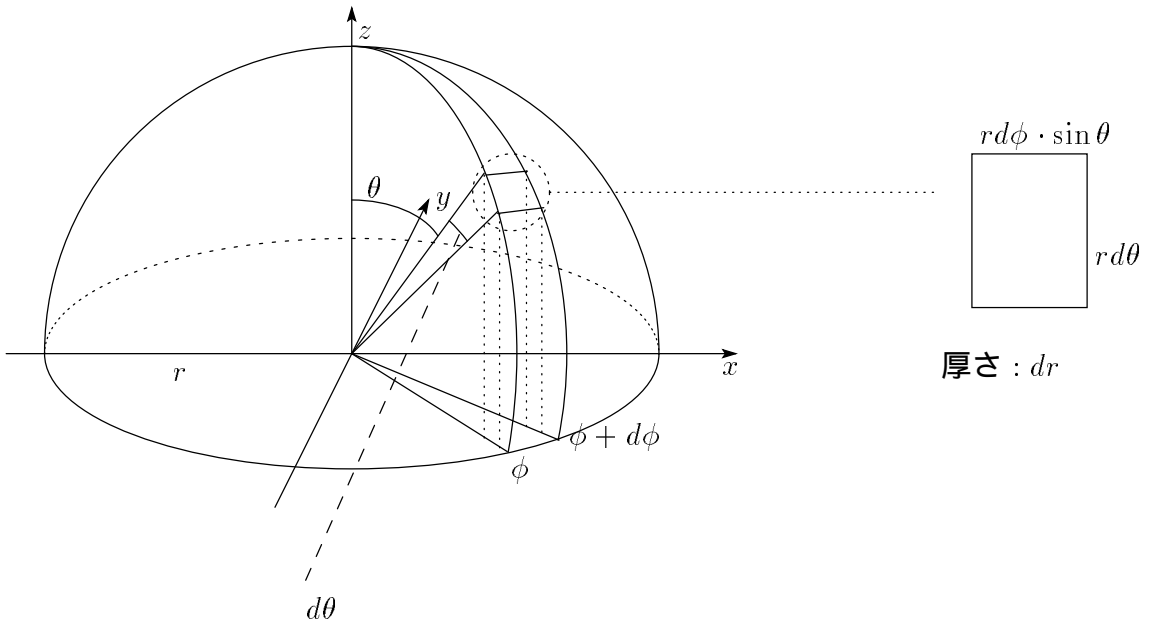


図 2.2: 円筒座標系と単位体積

このとき、$\vec{E}(\vec{x})$ を計算する。[1]

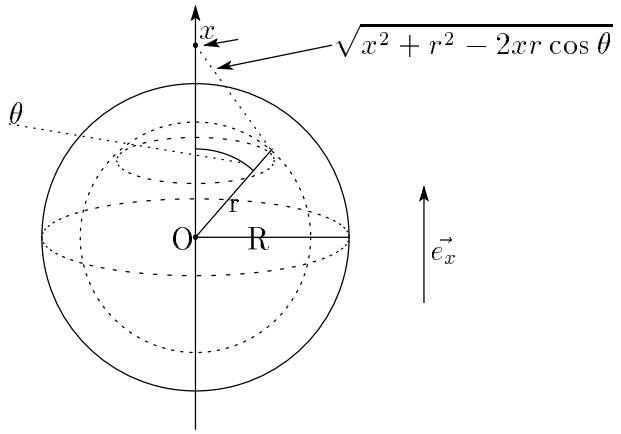


図 2.3: 一様電荷分布球の電場

$\vec{x} = x\vec{e_x}$, また $\vec{x'}$ を r, θ, ϕ で円筒座標表示して、

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R r^2 dr \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\int_0^{2\pi} d\phi\rho_0 \frac{\vec{x}-\vec{x'}}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3}$$

∵ 余弦定理:図参照より

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{e_x}\int_0^R r^2 dr \int_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi\rho_0 \frac{x - r\cos\theta}{(x^2+r^2-2xr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

[1] $\vec{x}$ は空間内の任意の点である。この $\vec{x}$ に合わせて、図 2.3 のような円筒座標系をとればよい。

$$\frac{x - r\cos\theta}{(x^2+r^2-2xr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2x}(x^2+r^2-2xr\cos\theta)}{(x^2+r^2-2xr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{2x}(x^2-r^2)}{(x^2+r^2-2xr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$ より/積分一発目

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{e_x}\rho_0 2\pi \int_0^R r^2 dr \int_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} d\cos\theta \frac{1}{2x}\left\{(x^2+r^2-2xr\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} + (x^2-r^2)(x^2+r^2-2xr\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

積分二発目

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{e_x}\rho_0 2\pi \int_0^R r^2 dr \frac{1}{-2xr}\frac{1}{x}\left[(x^2+r^2-2xr\cos\theta)^{\frac{1}{2}} - (x^2-r^2)(x^2+r^2-2xr\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\right]_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{e_x}\rho_0 2\pi \int_0^R r^2 dr \frac{1}{-2xr}\frac{1}{x}\left[|x-r| - (x+r) - (x^2-r^2)\left(\frac{1}{|x-r|} - \frac{1}{x+r}\right)\right]$$

ここで、$\frac{1}{-2xr}\frac{1}{x}\left[|x-r| - (x+r) - (x^2-r^2)\left(\frac{1}{|x-r|} - \frac{1}{x+r}\right)\right] = \begin{cases} \frac{2}{x^2} & (x > r) \\ 0 & (x < r) \end{cases}$

$x > R$ として、

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{e_x}\rho_0 2\pi \frac{2}{x^2}\int_0^R r^2 dr$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0\frac{1}{x^2}\vec{e_x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\vec{e_x} \quad (x > R)$$

$x < R$ のときは、

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{e_x}\rho_0 2\pi \frac{2}{x^2}\int_0^x r^2 dr$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\rho_0\vec{e_x}x \quad (x < R)$$

宿題:電気的双極子

点電荷 q,-q があるとし、-q から q への相対位置ベクトルを $\vec{l}$ とする。$\vec{P} = q\vec{l}$ を中心として $|l| \longrightarrow \vec{0}$ の極限をもったものを電気的双極子という。$\vec{x_i}$ に電気的双極子 $\vec{P}$ があるとき、$\vec{x}$ における電場 $\vec{E}(\vec{x})$ を求めよ[a]。)

[a] 極限は最後にとる

解)

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\vec{x} - \left(\vec{x_i} + \frac{1}{2}\vec{l}\right)}{\left|\vec{x} - \left(\vec{x_i} + \frac{1}{2}\vec{l}\right)\right|^3} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\vec{x} - \left(\vec{x_i} - \frac{1}{2}\vec{l}\right)}{\left|\vec{x} - \left(\vec{x_i} - \frac{1}{2}\vec{l}\right)\right|^3}$$

$|\vec{x} - \vec{x_i}| \gg \left|\frac{1}{2}\vec{l}\right|$ であるから、

$$\left|\vec{x} - \left(\vec{x_i} + \frac{\vec{l}}{2}\right)\right|^{-3} = \left\{\left(\vec{x} - \vec{x_i} - \frac{\vec{l}}{2}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}} = |\vec{x} - \vec{x_i}|^{-3}\left(1 - \frac{\vec{l}\cdot(\vec{x} - \vec{x_i})}{|\vec{x} - \vec{x_i}|^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\approx |\vec{x} - \vec{x_i}|^{-3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\vec{l}\cdot(\vec{x} - \vec{x_i})}{|\vec{x} - \vec{x_i}|^2}\right)$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left\{-\frac{\vec{l}}{|\vec{x} - \vec{x_i}|^3} + \frac{3\left\{\vec{l}\cdot(\vec{x} - \vec{x_i})\right\}(\vec{x} - \vec{x_i})}{|\vec{x} - \vec{x_i}|^5}\right\}$$

$\vec{e_r} = \frac{\vec{x} - \vec{x_i}}{|\vec{x} - \vec{x_i}|}$ として、

$$\longrightarrow -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left\{\vec{P} - 3(\vec{P}\cdot\vec{e_r})\vec{e_r}\right\}$$

(答)

第3章　ガウスの法則

3.1　積分型のガウスの法則

ある閉曲面があるとき、中に電荷があれば単位面積を垂直に貫く電気力線の数を合計した数すなわち、ある電荷から出る電気力線の総和は $\frac{q}{\varepsilon_0}$ である。っていうか、こう定義してあるんだから当たり前。また、電荷が外にあれば、入ってきた電気力線と出ていく電気力線の数が等しくなる[1]から正負合計した本数は 0。
これを式で書くと、

$$\int_S \vec{E}(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x})dS = \begin{cases} \frac{q}{\varepsilon_0} & \text{電荷が曲面の内側にあるとき} \\ 0 & \text{電荷が曲面の外側にあるとき} \end{cases}$$

ここで、$\vec{n}(\vec{x})$ は単位体積 ΔS の法線ベクトル (大きさは 1)。
まずは、電荷を囲む閉曲面が半径 R の球であるとして計算してみよう。閉曲面上のある点の位置ベクトルを $\vec{x}$ とする。

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^2} \quad (\hat{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} : x \text{ 方向の単位ベクトル。この場合} \vec{n}(\vec{x}) \text{ と一致})$$

これを利用して電気力線の総和を求めると、

$$\int_S \vec{E}(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x})dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^2}\hat{x}dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_S dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (\because S = 4\pi R^2)$$

次に、任意の閉曲面について考えてみよう。ΔS を貫く電気力線の本数を ΔN とする。$\vec{E}$ に垂直な面は $\Delta S\cos\theta$ であるが (図 3.1 参照のこと)、これを貫く電気力線の本数が ΔN であるから、

$$\frac{\Delta N}{\cos\theta\Delta S} = |\vec{E}|$$

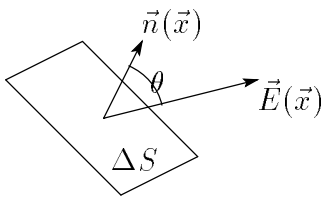


図 3.1: 閉曲面上での面積分

[1] 電荷のないところで電気力線が閉じることはないよね。

$$\therefore \Delta N = E\cos\theta\Delta S$$

$$\Leftrightarrow N = \lim_{\Delta S \longrightarrow 0}\left\{\sum_{all\Delta S}(\vec{E}\cdot\vec{n})\Delta S\right\} = \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS$$

この面積分は曲面の形に依存しないので、先ほどの結果を利用すれば任意の閉曲面について、

$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

が成り立つことが分かる。
電荷が密度 $\rho(\vec{x})$ で連続分布しているならば、q を積分に書き直して

$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x})dV \tag{3.1}$$

となる。
$*$ ガウスの法則は、電荷分布が対称性を持っているときに応用範囲が広い。
さて、次に面積分で表されたガウスの法則を体積積分に書き換える。そのために、まず「ガウスの定理」を学ぶ。

3.2 ガウスの定理 (発散定理)

ガウスの定理

$$\int_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \int_V \nabla\cdot\vec{A}dV$$

証明)
ある体積 V の中に小さな箱 Q があるとする。Q の体積を $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ とする。このような直方体 Q の表面 S_Q で、あるベクトル $\vec{A}$ の面積分を行う。
Q を面 $S_{x_0}, S_{x_0+\Delta x}, S_{y_0}, S_{y_0+\Delta y}, S_{z_0}, S_{z_0+\Delta z}$ に分解する。このとき、

$$\begin{aligned}\int_{S_Q}\vec{A}\cdot\vec{n}dS = &\int_{S_{x_0}}\vec{A}\cdot\vec{n}dS + \int_{S_{x_0+\Delta x}}\vec{A}\cdot\vec{n}dS\\ &+\int_{S_{y_0}}\vec{A}\cdot\vec{n}dS + \int_{S_{y_0+\Delta y}}\vec{A}\cdot\vec{n}dS\\ &+\int_{S_{z_0}}\vec{A}\cdot\vec{n}dS + \int_{S_{z_0+\Delta z}}\vec{A}\cdot\vec{n}dS\end{aligned}$$

S_{x_0}と$Sx_0+\Delta x$ではxの値のみが変化し、法線ベクトルの向きが逆なので、

$$\begin{aligned}
&\int_{S_{x_0}} \vec{A}\cdot\vec{n}dS + \int_{S_{x_0+\Delta x}} \vec{A}\cdot\vec{n}dS \\
&= -\int A_x(x_0,y_0,z_0)dydz + \int A_x(x_0+\Delta x,y_0,z_0)dydz \\
&= \int \frac{A_x(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-A_x(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}\Delta x dydz
\end{aligned}$$

Δxは十分小さいとして

$$= \int \frac{\partial A_x}{\partial x}dV$$

同様に、y,zについてもやると

$$\int_{S_Q} \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \int_{V_Q}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dV = \int_{V_Q}\nabla\cdot\vec{A}dV$$

さて、微小直方体については分かった。これを二つくっつけたとしよう。接合面での$\vec{A}\cdot\vec{n}$の値を考えると、$\vec{n}$の符号だけが逆になっていることが分かる。つまり、二つの微小直方体をくっつけると接合面での和が0になり、二つを合わせた立体についてまた、

$$\int_{S'} \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \int_{V'}\nabla\cdot\vec{A}dV$$

が成り立つことがわかる。よって、閉曲面に囲まれた物体全体について足し合わせても、

$$\int_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \int_V \nabla\cdot\vec{A}dV = \int_V \mathrm{div}\vec{A}dV$$

が成り立つ。

3.3 微分型のガウスの法則

微分型のガウスの法則

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x},t) = \mathrm{div}\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{x},t)$$

証明)
ガウスの定理を(3.1)に適用すればよい[2]。

[2]そもそもdivergenceというのは「湧き出し」という意味であるから、電荷から電気力線が湧き出す本数を表す法則と考えても感覚的には頷ける。

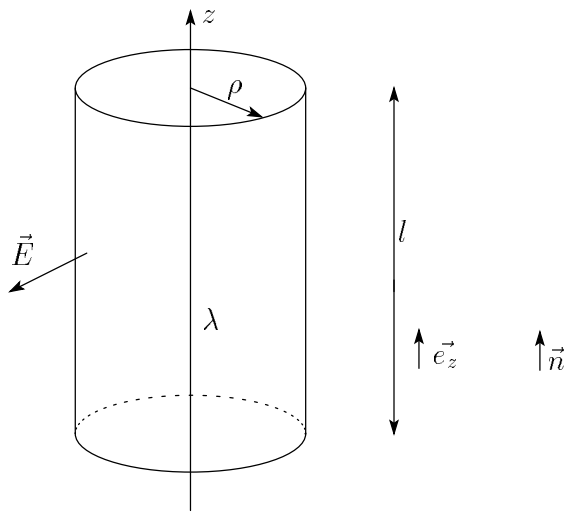


図 3.2: 無限に長い導線上の電荷分布と円筒形のガウス面

3.3.1 ガウスの法則を用いた計算例

普通に積分すると煩瑣になる計算も、ガウスの法則を用いれば難なく計算できる例を幾つか見てみよう。

直線上の電荷による電場

無限に長いまっすぐな導線に、一様な線密度 λ で分布した電荷による電場を求めよ (図 3.2 参照)。

単純な計算による解法 $\vec{x} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}$ とする。

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dz'\frac{\vec{x}-z'\vec{e_z}}{|\vec{x}-z'\vec{e_z}|^3} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\frac{(z-z')\vec{e_z}+\rho\vec{e_\rho}}{\left((z-z')^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$s = z' - z$ とする。

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}ds\frac{-s\vec{e_z}+\rho\vec{e_\rho}}{\left(s^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$s = \rho \tan\alpha$ とおくと $ds = \rho \dfrac{1}{\cos^2\alpha} d\alpha$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{1}{\cos^2\alpha} d\alpha \frac{\rho \vec{e_\rho}}{\rho^3 \frac{1}{\cos^3\alpha}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \vec{e_\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \cos\alpha \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \vec{e_\rho}
\end{aligned}
$$

ガウスの法則による解法

$$\vec{E}(\vec{x}) = E(\rho)\vec{e_\rho}$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\int_s \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) ds &= \int E(\rho)\vec{e_\rho} \cdot \vec{e_\rho} ds' \\
&= 2\pi\rho l E(\rho)
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
2\pi\rho l E(\rho) &= \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \\
E(\rho) &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \\
\vec{E}(\vec{x}) &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \vec{e_\rho}
\end{aligned}
$$

平面上の電荷分布

一様な面電荷密度 σ の無限に大きな板が作る電場を求めよ。

単純な計算による解法

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx'dy'\sigma \frac{\vec{x} - \vec{x'}}{|\vec{x} - \vec{x'}|^3}$$

$x = z\vec{e_z}$, $\vec{x'} = z'\vec{e_z} - \rho'\vec{e_\rho}$ で置き換える。微小面積 $dx'dy' = \rho d\alpha' d\rho$ とできるから、

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\infty} \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\alpha' \frac{z\vec{e_z} - \rho'\vec{e_\rho}}{(z^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

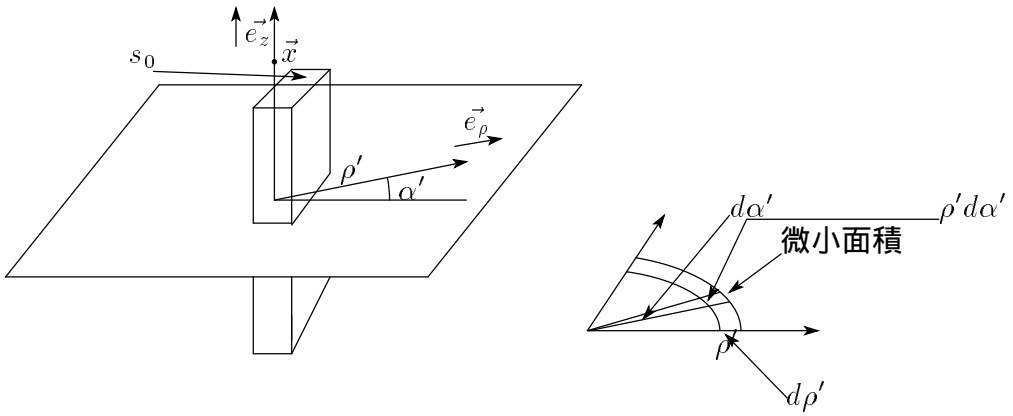


図 3.3: 無限に大きな板とガウスの法則

α で積分するときは $\dfrac{1}{(z^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$ は定数、$\rho\vec{e_\rho}$ は α の動径が 1 まわりすると消えるから、

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi z \vec{e_z} \int_0^\infty d\rho' \frac{\rho'}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z\vec{e_z} \left[-(z^2+\rho'^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e_z}
\end{aligned}
$$

ガウスの法則による解法

$$
\begin{aligned}
&\vec{E}(\vec{x}) = E(z)\vec{e_z} \\
&E(z) = \begin{cases} E(|z|) & z > 0 \\ -E(|z|) & z < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_s \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) ds &= s_0 E(|z|) - E(|-z|)\vec{e_z} \cdot (-\vec{e_z}) \\
&= 2s_0 E(|z|)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2s_0 E(|z|) = \frac{\sigma s_0}{\varepsilon_0} \\
&\Leftrightarrow E(|z|) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}) &= \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_z} & z > 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_z} & z < 0 \end{cases} \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_z}
\end{aligned}
$$

球面上の電荷分布

半径 r の球内部に一様な密度 ρ で電荷が分布しているときの電場を求めよ。

単純な計算による解法

前にやったので省略。

ガウスの法則による解法

$$\int_s \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho(\vec{x}) d^3x$$

球対称性から、

$$\vec{E}(\vec{x}) = E(|\vec{x}|) \cdot \hat{x} \quad (\hat{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|})$$

s を半径 r の球として

$$\begin{aligned} \int_s \vec{s}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) ds &= \int_s E(r) \hat{x} \cdot \hat{x} ds \\ &= 4\pi r^2 E(r) \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 E(r) &= \frac{1}{\varepsilon_0} q \\ E(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{1}{r^2} \\ \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{1}{r^2} \vec{e_r} \end{aligned}$$

第4章　静電ポテンシャル・静電エネルギー

4.1　はじめに

ここら辺から意味が分からなくなってくるので、一旦これから何をやるべきか整理してみる。

電場はベクトル量。
これをスカラー量である静電ポテンシャルから導けるようにするのが目的。
そのために静電ポテンシャルが経路に依らず一定であることを示さなければならない。
すなわち、クーロン力が保存力であることを示さなければならない。
これを示すためには、ガウスの定理の二次元版、ストークスの定理を使う必要がある。

ではいってみよう。

4.2　ストークスの定理

ストークスの定理

あるベクトル $\vec{A}$ について、面積分と線積分について

$$\int_S (\mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r})) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

が成り立つ。ただし、経路 C は曲面 S の周囲を囲んでおり、S 上の法線ベクトル $\vec{n}(\vec{r})$ の方向は、C が反時計回りに見える向きに定義される (図 4.1 参照)。

証明)
図 4.1 のような xy 平面上の小さな長方形 $\Delta S = \Delta x \Delta y$ を考える。法線ベクトル $\vec{n}$ の方向は z 軸の正の方向とする。この長方形 ΔS のまわりの経路 C' で考えよう。C' 上の線積分は一次近似すれば当然

$$\begin{aligned}\oint_{C'} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \cong & A_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + A_y(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)\Delta y \\ & - A_x(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)\Delta x - A_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y\end{aligned}$$

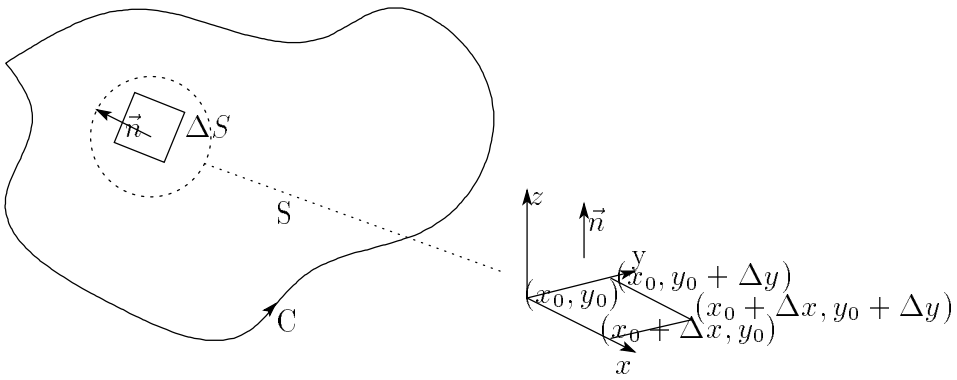


図 4.1: ストークスの定理

$A_x(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) \cong A_x(x_0, y_0, z_0) + \dfrac{\partial A_x(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\Delta y$ と、

$A_y(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \cong A_y(x_0, y_0, z_0) + \dfrac{\partial A_y(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\Delta x$ を代入して、

$$\begin{aligned}\int_{C'} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &\cong \left(\frac{\partial A_y(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y \\ &= (\nabla \times \vec{A})_z \Delta x \Delta y \\ &\cong \int_{\Delta S} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS\end{aligned}$$

これは、三次元の任意の曲面について成り立つ[1]。
上で使った長方形と同じような微小長方形 ΔS_1, ΔS_2 をある一辺を接してくっつけたとする。このとき、その辺上での $\vec{A} \cdot d\vec{r}$ が互いに異符号になって打ち消し合うから結局周囲の線積分だけが残るわけ。このようにして、三次元の任意の曲面について、ストークスの定理が成り立つことが証明された。

4.3 静電場の渦なしの法則

静電場が保存力を導く場であることを証明するためには、$\vec{F}$(クーロン力) を線積分して 0 になることを示せばよい。$\vec{F}$ は $\vec{E}$ に比例するから、

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

を示せばよいということになる。

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = 0$$

となる。平面が微小であると考えれば $\vec{n}$ が一定であるから、

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

[1] 以下の証明の仕方はガウスの時とほとんど同じ。

を示せばいいことが分かる。すなわち、

$$\nabla \times \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} (\vec{r} - \vec{r'}) dV \right)$$

を示せばよい。
ここで、(電気的双極子の所でもにもこんな式変形したね)

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{-\frac{3}{2}} = -n \frac{(x - x')}{|\vec{r} - \vec{r'}|^5}$$

を利用すると、

$$\begin{aligned}
\left(\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \right)_x &= \frac{\partial E_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial E_y(\vec{r})}{\partial z} \\
&= \frac{\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0} \left[(z - z') \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} - (y - y') \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \right] dV \\
&= \frac{\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0} \int \left[(-3) \frac{(z - z')(y - y')}{|\vec{r} - \vec{r'}|^5} + 3 \frac{(y - y')(z - z')}{|\vec{r} - \vec{r'}|^5} \right] dV \\
&= 0
\end{aligned}$$

y,z 成分についても同様の計算を適用すると、

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

を証明することができる。よって、静電場は保存力を導く[2]。

4.4 静電ポテンシャル

ある状態 A から B への電場の変化を考えてみよう。前項により、経路に依存しないことは分かっているから、P をある 定点 として、

$$\begin{aligned}
\int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_A^P \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_P^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
&= -\int_P^A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_P^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
&= \phi(\vec{r_B}) - \phi(\vec{r_A})
\end{aligned}$$

と表せる。もちろん

$$\begin{cases}
\phi(\vec{r_B}) = -\int_P^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + C \\
\phi(\vec{r_A}) = -\int_P^A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + C
\end{cases}$$

[2] この式とガウスの式を用いると、逆にクーロンの法則を導くことができる (あとで述べる)。クーロンの法則からガウスの法則を導くのは前にやった。

である (が、P をちょうど $C = 0$ となる点ととれば都合がいい)。
この スカラー量$\phi(\vec{r})$ を 静電ポテンシャル という。

$$d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

であるが、

$$\begin{aligned} d\phi &= \phi(x + dx, y + dy, z + dz) - \phi(x, y, z) \\ &\cong \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \\ &= \nabla \phi \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

でもあるため、

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \phi(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\phi(\vec{r})$$

となる。これで静電ポテンシャルを定義する場合もある。

$*$ ϕ の勾配が $\vec{E}$ となる。

$\vec{E}(\vec{x}) = -\mathrm{grad}\phi(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$ を示そう。
証明)
$(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\nabla \phi))_x &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \phi - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \phi \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \right) \phi = 0 \end{aligned}$$

y,z 成分についても同様。
$(\Rightarrow)$
すぐ前に書いてあるとおり、適当な経路をとってきて云々すればいいだけ。

(証明終わり)

静電ポテンシャルの単位は $\mathrm{V} = [\mathrm{J/C}] = \mathrm{NmC^{-1}}$ [3]

4.5 ポアソンの方程式

ポアソンの方程式は静電ポテンシャルと電荷密度を結ぶ重要な式[4]である。
特に、電荷分布が対称性をもつ とき役に立つ。

[3] これを見ると、静電ポテンシャルは「単位電荷あたりのポテンシャルエネルギーである」ことが分かる。
[4] ついでなので、電荷密度・電場・静電ポテンシャルの関係を確認しておこう。

ポアソンの方程式

$$\triangle\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

証明)

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi \\ \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

から、直ちに

$$\triangle\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

が導かれる。

(証明終わり)

ところで、電荷が存在しないと

$$\triangle\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

となる。これをラプラスの方程式という。

4.5.1 ポアソンの方程式を用いた計算例

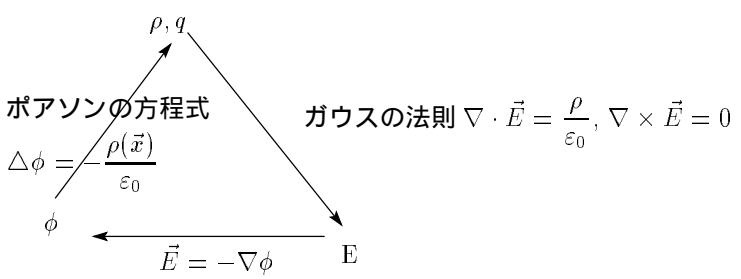
球対称な分布

球対称なポテンシャルに対してラプラス方程式を解け (一般解)。

$$\phi(\vec{x}) = \phi(r)$$

であるが、

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\phi}{dr} = \frac{x}{r}\frac{d\phi}{dr}$$



$\therefore r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$とすると、$\dfrac{\partial r}{\partial x} = 2x\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{x}{r}$

さらにもう一回微分して、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\frac{d\phi}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} + x\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r}\frac{d\phi}{dr} + \frac{x}{r}\frac{x}{r}\frac{d^2\phi}{dr^2} = \left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)\frac{d\phi}{dr} + \frac{x^2}{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)\frac{d\phi}{dr} + \frac{y^2}{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)\frac{d\phi}{dr} + \frac{z^2}{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2}$$

$$\therefore \triangle\phi = \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} + \frac{d^2\phi}{dr^2}$$

さて、$\triangle\phi = 0$ ならば、

$$\frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} + \frac{d^2\phi}{dr^2} = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 0$$

(最後の変形はあとで使うために入れた。計算すれば分かる)

$$\frac{\phi''}{\phi'} = -\frac{2}{r}$$

これを積分して、

$$\log\phi' = -2\log r + C$$

よって

$$\phi' = \frac{C}{r^2}$$

もう一度 r について積分して、

$$\phi = \frac{A}{r} + B$$

となる。
ここで、境界条件を考慮しなければならない。$r \longrightarrow \infty$ のとき $\phi = 0$ より、$B = 0$。よって、

$$\phi = \frac{A}{r}$$

が解の一般形となる。
これをは次の、代表的な場合で確認できる。
$\vec{x} = 0$ に点電荷 q が存在するとき、

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\frac{1}{r}$$

$$A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q,\ (B = 0)$$

とすればラプラスの方程式の解となる。

球状の分布

半径 R の球に電荷が一様に分布しているとき、ポアソンの方程式から静電ポテンシャルの式を導け。

解)

$$\triangle\phi = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

である。これはポアソンの方程式から自明。また、前の問題で出てきた球対称な場合の一般形を用いた。

1. $r < R$ のとき
   積分して、

   $$\phi_{in} = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + c + \frac{d}{r} \quad (r < R)$$

   とおける。
   ここで、$r = 0$ のときに有限なポテンシャルが存在することから $d = 0$。

2. $r > R$ のとき

   $$\phi_{out} = \frac{b}{r}$$

   さて、ここで境界条件

   $$r = R \text{ のとき} \phi_{out} = \phi_{in},\ \frac{d\phi_{out}}{dr} = \frac{d\phi_{in}}{dr}$$

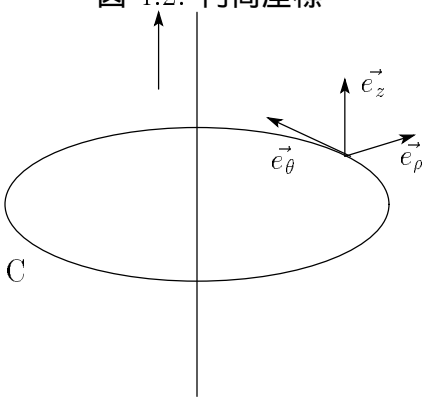
   から (途中計算略)

   $$\begin{cases} b = \dfrac{R^3\rho}{3\varepsilon_0} \\ c = \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2 \end{cases}$$

   以上から、

   $$\phi = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right) & r < R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & r > R \end{cases}$$

図 4.2: 円筒座標



である[5]。

円筒座標

線状に分布した電荷について、ポアソンの方程式を解け。

解)

[5]逆に、この静電ポテンシャルからポアソンの式を逆に出してみよう。

$$q = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$$

とおいて、

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\dfrac{1}{2R^3}(-2r)\dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(-\dfrac{x}{R^3}\right) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(-\dfrac{1}{r^2}\right)\dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(-\dfrac{x}{r^3}\right) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(-\dfrac{1}{R^3}\right) = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\dfrac{1}{R^3} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left\{\left(-\dfrac{1}{r^2}\right) + (-x)\left(\dfrac{-3}{r^4}\right)\dfrac{x}{r}\right\} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3x^2}{r^5}\right) \end{cases}$$

よって、

$$\Delta\phi = \begin{cases} -\dfrac{3}{4\pi\varepsilon_0}q\dfrac{1}{R^3} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

基本的な計算法は球対称の分布の場合とほとんど同じ。

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{d\phi}{d\rho} = \frac{x}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho}$$
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} + x\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{x}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho} + \frac{x}{\rho}\frac{x}{\rho}\frac{d^2\phi}{d\rho^2} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\right)\frac{d\phi}{d\rho} + \frac{x^2}{\rho^2}\frac{d^2\phi}{d\rho^2}$$
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3}\right)\frac{d\phi}{d\rho} + \frac{y^2}{\rho^2}\frac{d^2\phi}{d\rho^2}$$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \dfrac{\partial\rho}{\partial x} = \dfrac{x}{\rho}$ より、

$$\Delta\phi = \frac{1}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho} + \frac{d^2\phi}{d\rho^2}$$

であるから、$\Delta\phi = 0$ とすれば

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho} + \frac{d^2\phi}{d\rho^2} = 0$$
$$\frac{\phi''}{\phi'} = -\frac{1}{\rho}$$
$$\log\phi' = -\log\rho + C$$
$$\phi' = \frac{C}{\rho}$$
$$\phi = A\log\rho + B$$

面状の電荷

面状に分布した電荷について、ポアソンの方程式を解け。

面に垂直な方向を z 軸でとる。このとき、

$$\phi(\vec{x}) = \phi(z)$$
$$\triangle\phi = \frac{d^2\phi}{dz^2}$$

$\triangle\phi = 0$ であれば、

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0$$
$$\phi = Az + B$$

となる。
これは例えば、

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{e_z}$$

を積分して (負号をつけて)

$$\phi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|$$

と解いた静電ポテンシャルの形にも合っている。

4.6 静電エネルギー

電荷 q を静電場内で移動するときに作用する力は、

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q\nabla\phi$$

であるから、$A \longrightarrow B$ で電荷が受ける仕事は

$$U = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{x} = -q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{x} = q(\phi(\vec{r_B}) - \phi(\vec{r_A}))$$

このように、電位差に比例する。無限遠から積分したと考えれば静電エネルギーは

$$U = q\phi(\vec{x})$$

となる。
ここで、

$$\phi(\vec{x_i}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j q_j\frac{1}{|\vec{x_i}-\vec{x_j}|} \Rightarrow U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j q_iq_j\frac{1}{|\vec{x_i}-\vec{x_j}|}$$

より、電荷の集合体に対して

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} q_iq_j\frac{1}{|\vec{x_i}-\vec{x_j}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j} q_iq_j\frac{1}{|\vec{x_i}-\vec{x_j}|}$$

連続電荷分布の場合はどうなるだろうか?

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int_V\int_V \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|}d^3xd^3x'$$

これは上の式の、$i=j$ の部分 (自己エネルギー $\cdots$ 電荷が自分自身で持っているエネルギー:x に依存しないから、x 同士引けば消える) も含めて考えたことになる。[6]
静電エネルギーは電場を使ったらどのように表せるだろうか。

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|}d^3x$$

[6]分母が 0 になるのはまずいが、実際の例で考えると上の式なら大丈夫 (あとで示す)

と見比べて、

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{x})\phi(\vec{x})d^3x \tag{4.1}$$

と書き換えることができる。また、

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{x}), \quad \triangle = \nabla\cdot\nabla = \mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}$$

より

$$U = \frac{1}{2}\int_V (-\varepsilon_0 \triangle \phi(\vec{x}))\phi(\vec{x})d^3x = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V (\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x}))\phi(\vec{x})dV$$

部分積分の公式より $\nabla\cdot(\phi\vec{E}) = \nabla\phi\cdot\vec{E} + \phi\nabla\cdot\vec{E} \Leftrightarrow (\nabla\cdot\vec{E})\phi = \nabla\cdot(\phi\vec{E}) - \nabla\phi(=\vec{E})\cdot\vec{E}$ だから

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V \left\{\nabla\left(\phi(\vec{x})\nabla\phi(\vec{x})\right) - \vec{E}(\vec{x})^2\right\}d^3x \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_S \phi(\vec{x})\nabla\phi(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x})dS + \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V (\vec{E}(\vec{x}))^2 d^3x \quad \text{(発散定理で表面積分に)}
\end{aligned}$$

V を、電荷を囲む充分に大きな、半径 R の球とすると、電荷を点電荷として見なすことができ、オーダーで考えれば

$$\phi(\vec{x}) \longrightarrow \frac{1}{R}, \quad |\nabla\phi(\vec{x})| \longrightarrow \frac{1}{R^2}, \quad dS \longrightarrow R^2$$

とできる。このとき、

$$\text{(第一項)} \longrightarrow \frac{1}{R}\frac{1}{R^2}R^2 \longrightarrow 0$$

より、以降の計算で無視して構わない。よって

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V \vec{E}^2(\vec{x})d^3x}$$

これが一様に電荷が分布している球 (半径 a) の場合に正しいことを示してみよう。すなわち、

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \rho_0 & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} r\vec{e_r} & (r < a) \\ \frac{1}{3}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\vec{e_r} & (r > a) \end{cases}$$

まずは普通に計算してみよう。あとで電場から計算した場合と比較して同じになることを示す。

$$U = \frac{\rho_0^2}{8\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|}$$

対称性から、球座標で $x' = r'\sin\theta\cos\phi,\ y' = r'\sin\theta\sin\phi,\ z' = r'\cos\theta$ より、$|\vec{x}-\vec{x'}| = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$ なので

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^a dr'r'^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\rho_0^2}{8\pi\varepsilon_0} 8\pi^2 \int_0^a dr r^2 \int_0^a dr'r'^2 \left[-\frac{1}{rr'}(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta')^{\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{\rho_0^2}{8\pi\varepsilon_0} 8\pi^2 \int_0^a dr r^2 \int_0^a dr r' r'^2 - \frac{1}{rr'}\left\{|r-r'| + (r+r')\right\} \\
&= \frac{\rho_0^2}{8\pi\varepsilon_0} 8\pi^2 \int_0^a dr r^2 \left\{\int_0^a dr'r'^2 \frac{2}{r} + \int_r^a dr'r'^2 \frac{2}{r'}\right\} \\
&= \frac{\rho_0^2}{8\pi\varepsilon_0} 8\pi^2 \int_0^a dr r^2 \left\{\frac{2}{3}r^2 + (a^2 - r^2)\right\} \\
&= \frac{\rho_0^2}{8\pi\varepsilon_0} 8\pi^2 \int_0^a dr r^2 \left(a^2 - \frac{1}{3}r^2\right) \\
&= \frac{\rho_0^2}{8\pi\varepsilon_0} 8\pi^2 \int_0^a dr r^2 \left(\frac{1}{3}a^5 - \frac{1}{15}a^5\right) \\
&= \frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{15\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

これを電場から計算する。

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\int_0^a \left(\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\right)^2 r^2 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \left(\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\right)^2 \frac{4\pi r^2}{r^4} dr\right] \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\left(\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi \frac{a^5}{5} + \left(\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi \frac{1}{a}\right] = \frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{15\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

よって一致していることが分かった。

第5章　電流

5.1　電流と電荷保存則

- 電流 I とは、単位時間に通過する電荷の量のことである。
  単位 $[A] = [C][s^{-1}]$ である。ただ、むしろ A をもとに C(クーロン) を定義する場合もある (単位系による)。

- 電流密度 j とは、単位面積あたりの電流である。すなわち、

  $$j = \frac{I}{s}$$

  電流密度ベクトルを $\vec{j}(\vec{x},t)$ とし、大きさは j, 方向は電流の向きとする。

連続の方程式と電荷保存則

電流密度を $\vec{j}$ とすると、

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x},t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x},t) = 0 \quad (\text{連続の方程式} : \text{continuity equation})$$

が成り立つ。また、定常電流の場合

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x},t) = 0 \quad (\text{電荷保存則})$$

が成り立つ。これは定常電流には湧き出しがないことを示している。

証明)
$\rho(\vec{x},t), \vec{j}(\vec{x},t)$ について、V という領域 (表面積 S) から流れ出す電流 $I(t)$ は

$$I(t) = \int_S \vec{j}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(\vec{x})dS = (\text{発散定理}) \int_V \mathrm{div}\vec{j}(\vec{x},t)dV$$

流れ出す電荷の量 $Q(t)$ は

$$Q(t) = \int_V \rho(\vec{x},t)d^3x$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}d^3x$$

すなわち、

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -I(t)$$

まとめれば

$$\int_V \frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t} d^3x = -\int_V \mathrm{div}\vec{j}(\vec{x},t) d^3x$$

すなわち、

$$\frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j}(\vec{x},t) = 0 \tag{5.1}$$

ここで、定常電流という仮定をすると、$\frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t}$ である。よって、

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x},t) = 0$$

となる。

(証明おわり)

5.2 オームの法則

ある断面積 S, 長さ l の物体の片端の静電ポテンシャルを $\phi(\vec{x_2})$、もう片端の静電ポテンシャルを $\phi(\vec{x_1})$ とするとき、

$$I = \frac{\phi(\vec{x_2}) - \phi(\vec{x_1})}{R}$$

この R を電気抵抗という。また、

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

という関係があり、$\rho \quad [\Omega m]$ を抵抗率、$\sigma = \rho^{-1} \quad [\Omega^{-1} m^{-1}]$ を電気伝導度という。
次に、これを微視的なものに書き換える。

$$I = \frac{\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x} + \Delta\vec{x})}{R} = \frac{-\mathrm{grad}\phi(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x}}{R}$$

電流密度 j を用いて

$$I = \frac{\vec{j}(\vec{x'}) \cdot \Delta\vec{x}}{|\Delta\vec{x}|} \Delta S$$

と表すこともできるので、

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{x'}) &= \frac{-\mathrm{grad}\phi(\vec{x})|\Delta\vec{x}|}{R\Delta S} \\ &= -\sigma \mathrm{grad}\phi(\vec{x}) \end{aligned}$$

$\vec{E}(\vec{x}) = -\mathrm{grad}\phi(\vec{x})$ より、

$$\vec{j}(\vec{x'}) = \sigma\vec{E}(\vec{x})$$

これを微視的なオームの法則という。

電子論:
< 電子の運動方程式 >
電場を E とすると、

$$m\frac{\vec{x}}{dt} = -e\vec{E} - m\gamma\vec{v}$$

定常状態であれば、

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

であるから、

$$\vec{v} = 0 - \frac{e}{m\gamma}\vec{E}$$

$\vec{j} = -Ne\vec{v}$ $(N$: 導体中の自由電子の数$)$ であるから、

$$\begin{aligned}\vec{j} &= -Ne\left(-\frac{e}{m\gamma}\vec{E}\right) \\ &= \frac{Ne^2}{m\gamma}\vec{E}\end{aligned}$$

ここで、$\sigma = \dfrac{Ne^2}{m\gamma}$。前の式と比較すれば分かる。

5.3 ジュールの法則

仕事 (ジュール熱) を W とすると、

$$W = q[\phi(\vec{x_1}) - \phi(\vec{x_2})] = q\Delta\phi$$

仕事率は

$$P = I\Delta\phi = RI^2 = \frac{(\Delta\phi)^2}{R}$$

ジュールの法則は次のように書ける。断面積 ΔS, 長さ Δx を考えて

$$P = p(\vec{x})\Delta S \Delta x$$

静電ポテンシャルの勾配 $(= \mathrm{grad})$ は電場であるから、

$$p(\vec{x}) = \frac{I\Delta \cdot \phi}{\Delta S \Delta x} = \vec{j}(\vec{x'}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

これを、微視的なジュールの法則という。
微視的なジュールの法則も電子の挙動から導くことができる。

$$p(\vec{x}) = \sum \frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{x}) = N(-e\vec{E})\vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

第6章　電流と静磁場

6.1　アンペールの力とローレンツ力

z 軸方向の 2 直線が、y 軸にそって L 離れているとき、

$$\boxed{\Delta F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}\vec{e_y}\Delta L}$$

が成り立つ。これを利用して電流の単位が定められている。

電流の単位 A: 真空中で距離 $1\mathrm{m}$ 隔てて置かれた 2 つの同じ強さの平行電流に作用する力が $1\mathrm{m}$ あたり $2\times10^{-7}N$ であるとき、その電流の強さを $1\mathrm{A}$ と定義する。

この定義より、μ_0 を求めることができる。アンペールの法則に代入して、$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\quad[N/A^{-2}]$。これも、微視的な立場から分析してみよう。電荷密度 ρ、電子の速度 v、断面積 ΔS とすると、

$$\Delta\vec{F_{12}} = \frac{\mu_0\rho v\Delta S I_2}{2\pi R}\vec{e_y}\Delta L$$

$\vec{e_y} = \vec{e_z}\times\vec{e_x}$ であるから、

$$= \rho\Delta S\Delta L\vec{e_z}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_x}$$
$$= q\vec{v}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{e_x}$$

$B(\vec{x}) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{e_x}$ とすると、

$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$と表せる。

$\vec{B}(\vec{x})$ は磁場[1]で、単位は $[T] = NC^{-1}m^{-1}s = NA^{-1}m^{-1}\cdots$上の式より
ローレンツ力$\boxed{q(\vec{E}(\vec{x})+\vec{v}\times\vec{B}(\vec{x}))}$

[1]磁束密度ということあるが、ここではあえてそう呼ばない

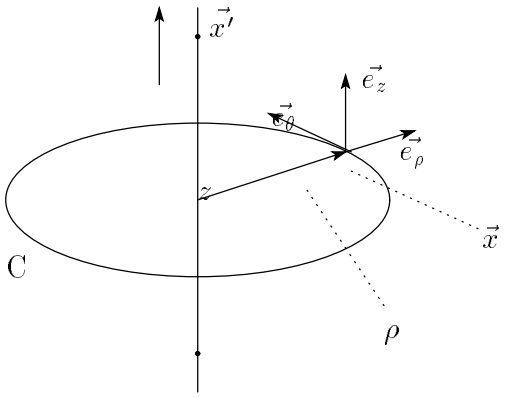


図 6.1: 円筒座標

6.2 電流の作る磁場 ~ ビオ・サヴァールの法則

ある経路 C を電流 I が流れているとき、位置 $\vec{x'} \to \vec{x'} + d\vec{x'}$ の部分による磁場 (変化部分 $d\vec{x'}$ を電流素片という) を考えると、

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{x'} \times \frac{\vec{x} - \vec{x'}}{|\vec{x} - \vec{x'}|^3}$$

これが、電流素片の作る磁場。足しあわせて、

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C d\vec{x'} \times \frac{\vec{x} - \vec{x'}}{|\vec{x} - \vec{x'}|^3}}$$

これが、C 全体の作る磁場。

さて、直線電流に適用して、これが成立することを示してみよう。ただし、図 6.1 のような円筒座標 (ρ, θ, z) を使うものとする。

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C d\vec{x'} \times \frac{\vec{x} - \vec{x'}}{|\vec{x} - \vec{x'}|^3}$$
$$\vec{x'} = z'\vec{e_z},\ d\vec{x'} = dz'\vec{e_z},\ \vec{x} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}$$
$$d\vec{x'} \times (\vec{x} - \vec{x'}) = dz'\vec{e_z} \times (\rho\vec{e_\rho} + (z - z')\vec{e_z}) = dz'\rho\vec{e_\theta}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\rho\vec{e_\theta}}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$s = z' - z$ であるから

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \rho \vec{e_\theta} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{1}{(s^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \rho \vec{e_\theta} \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{s}{(s^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{s=-\infty}^{s=\infty} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \rho \vec{e_\theta} \frac{1}{\rho^2} \cdot 2 \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e_\theta}
\end{aligned}
$$

6.2.1 ビオ・サヴァールの法則を用いた計算例

1. 直線電荷
   上でやったから省略。

$$
\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e_\theta}
$$

$$
(cf. \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \vec{e_r})
$$

2. 円形電流
   z 軸に直交する半径 a の円に電流 I が流れているとする。このとき (座標の取り方は上と一緒だが、原点は円の中心に合わせる)、

$$
\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C d\vec{x'} \times \frac{\vec{x} - \vec{x'}}{|\vec{x} - \vec{x'}|^3}
$$

$$
\vec{x'} = a\vec{e'_\rho} = a \begin{pmatrix} \cos\theta' \\ \sin\theta' \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\vec{x} = z\vec{e_z}
$$

$$
d\vec{x'} = a d\theta' \vec{e_\theta}
$$

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} a d\theta' \vec{e_\theta}' \times \frac{z\vec{e_z}' - a\vec{e_\rho}'}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\theta' \frac{z\vec{e_\rho} + a\vec{e_z}'}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e_z}\end{aligned}$$

このように z 軸方向を向いた磁場が生じることが分かる。

3. ソレノイド
z 軸と垂直で半径 a, 単位長さあたりの巻数が n であるソレノイドを考える。巻線同士の間隔 $\Delta z = \frac{1}{n}$, $z_i = i\Delta z$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{((z-z_i)^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{1}{\Delta z}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{\{(z-i\Delta z)^2+a^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ &\approx \frac{\mu_0 I}{2} n\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{a^2}{((z-z')^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e_z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} n\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{a^2}{(s^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e_z} \qquad s = z'-z\end{aligned}$$

もし、円電流の結果を利用してよいのなら直ちにこれが導かれるのだが...

$$\begin{aligned}&= \frac{\mu_0 I}{2} n\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{\infty}^{\infty}\vec{e_z} \\ &= \mu_0 n I\vec{e_z}\end{aligned}$$

$I = |\vec{j}(\vec{x'})| \cdot dS$ (S:導線の断面積) であるから、

$$\begin{aligned}I d\vec{x'} &= |\vec{j}(\vec{x'})| dS' d\vec{x} \\ &= \vec{j}(\vec{x'}) dS' |d\vec{x}| \\ &= \vec{j}(\vec{x'}) d^3x'\end{aligned}$$

よって、ビオ・サヴァールの法則は次のように書き直すことができる。

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x' \vec{j}(\vec{x'}) \times \frac{\vec{x}-\vec{x'}}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3}$$

ちなみに、

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int d^3x'\rho(\vec{x'})\frac{\vec{x}-\vec{x'}}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3}$$

連続方程式 (電荷保存) は

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j}(\vec{x},t) = 0$$

$*$ 定常状態では、$\dfrac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t} = 0$ となる。

第7章　アンペールの法則とベクトルポテンシャル

ここでわざわざ章を分けたのは、静磁場にとってアンペールの法則が、静電場にとってのガウスの法則に対応するからである。

7.1　アンペールの法則

$$\int_C d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x})$$

を、電流 I を囲む任意の閉曲線 C について考えてみよう。

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\rho}\vec{e_\theta}(= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{R}\vec{e_\theta} \quad \text{今の場合})$$

$$\vec{x} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z} \Rightarrow d\vec{x} = d\rho\vec{e_\rho} + \rho d\theta\vec{e_\theta} + dz\vec{e_z}(= Rd\theta\vec{e_\theta} \quad \text{今の場合})$$

より、

$$\int_C d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} Rd\theta\vec{e_\theta} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{R}\vec{e_\theta}$$

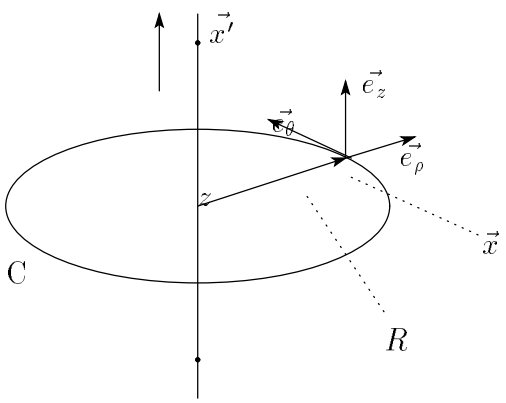


図 7.1: アンペールの法則 ~ 円筒座標

$$\int_C d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_C d\theta = \mu_0 I \quad (C \text{ が } I \text{ のまわりを一周だけした場合})$$

任意の閉曲線について成り立つ。ただ、I のまわりを n 回まわっている場合は $\mu_0 nI$ となる。
全部まとめて、

$$\boxed{\int_C d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I \quad (I : C \text{ を貫く電流})}$$

これは電流密度を使って書き直すことができる。すなわち、

$$\boxed{\int_C d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0\int_S dS\vec{n}(\vec{x})\cdot\vec{j}(\vec{x'})}$$

これを アンペールの法則 という。これも微分形に書き直すことができる。ストークスの定理を用いて、

$$\int_C d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) = \int_S dS\vec{n}(\vec{x})\cdot\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0\int_S dS\vec{n}(\vec{x})\cdot\vec{j}(\vec{x'})$$

$$\therefore \mathrm{rot}\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0\vec{j}(\vec{x'})$$

これをアンペールの法則の微分形という。

さて、ここで磁場と電場について整理しておこう。

磁場・電場の法則

磁場	電場
$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\vec{j}(\vec{x'})\times\frac{\vec{x}-\vec{x'}}{\lvert\vec{x}-\vec{x'}\rvert^3}$	$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\rho(\vec{x'})\frac{\vec{x}-\vec{x'}}{\lvert\vec{x}-\vec{x'}\rvert^3}$
$\int_C d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I = \mu_0\int_S dS\vec{n}(\vec{x})\cdot\vec{j}(\vec{x'})$	$\int_S dS\vec{E}(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x}) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3x\rho(\vec{x})$
$\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0\vec{j}(\vec{x'})$	$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{x})$
$\mathrm{div}\vec{B}(\vec{x}) = 0$	$\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{x}) = 0$

$*$ 磁場に関する法則の下二つはアンペールの法則と、
電場に関する法則の下二つはクーロンの法則と同値である。
また、電場が時間依存性を持つ場合、

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j}(\vec{x},t) = 0$$

が成り立つ。
< ヘルムホルツの定理 >

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{V}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \\ \mathrm{rot}\vec{V}(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) \end{cases}$$

を満たす $\vec{V}(\vec{x})$ は一意に存在する。[1]

7.2 ベクトルポテンシャル

一般に、$\mathrm{div}\vec{B}(\vec{x}) = 0$ であるが、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{x})$$

を満たす $\vec{A}(\vec{x})$ が存在する。ただし、一意的には定まらない (任意性を持つ)。
この $\vec{A}(\vec{x})$ をベクトルポテンシャル (vector potential) という。

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \vec{j}(\vec{x}) \times \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x'}|} d^3x'$$
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{x}) \times \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x'}|} d^3x'$$
$$\vec{B}(\vec{x}) = \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{x})$$

となるわけだが。
これを用いて各々の式を書き換えると、

$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla\vec{V}) - \nabla^2\vec{V}$ より、

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{x}) - \nabla(\nabla\vec{A}(\vec{x})) = -\mu_0\vec{j}(\vec{x})$$

これがベクトルポテンシャルが満たす式の一般形。ここで、さらに $\mathrm{div}\vec{A} = \nabla\vec{A} = 0$ という条件を課すと、

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{x}) = -\mu_0\vec{j}(\vec{x}), \quad \nabla\vec{A}(\vec{x}) = 0$$

ベクトルポテンシャルも含めて、もう一度表をのせておく。

[1] $\vec{x} \longrightarrow \infty, \quad \vec{V}(\vec{x}) \longrightarrow 0$ の極限をとるのか?

磁場・電場の法則 2

磁場	電場
$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\vec{j}(\vec{x'}) \times \frac{\vec{x}-\vec{x'}}{\lvert\vec{x}-\vec{x'}\rvert^3}$	$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\rho(\vec{x'})\frac{\vec{x}-\vec{x'}}{\lvert\vec{x}-\vec{x'}\rvert^3}$
$\int_C d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I = \mu_0\int_S dS\vec{n}(\vec{x})\cdot\vec{j}(\vec{x'})$	$\int_S dS\vec{E}(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x}) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3x\rho(\vec{x})$
$\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0\vec{j}(\vec{x'})$	$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{x})$
$\mathrm{div}\vec{B}(\vec{x}) = 0$	$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{x}) = 0$
$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$	$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$

ベクトルポテンシャルを使っても、

$$\mathrm{div}\vec{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$$

$$\because \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0$$

のように、$\mathrm{div}\vec{B} = 0$ は直ちに導ける。

7.3 磁場中の電流が受ける力

ローレンツ力

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{x})+\vec{v}\times\vec{B}(\vec{x}))$$

単位体積 $\Delta V = \Delta S\Delta x$ あたり n 個の電荷 (1 個あたり q の電荷を持つ) が速度 $\vec{v}$ で運動しているとしよう。このとき、

$$\begin{aligned}\Delta\vec{F} &= n\Delta V q\vec{v}\times\vec{B}(\vec{x})\\ &= \vec{j}(\vec{x})\times\vec{B}(\vec{x})\Delta V\\ &= \vec{j}(\vec{x})\times\vec{B}(\vec{x})\Delta S\Delta x\\ &= I\Delta\vec{x}\times\vec{B}(\vec{x})\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\Delta\vec{F} = I\Delta\vec{x}\times\vec{B}(\vec{x})}$$

これをアンペールの力という。

この結果を使うと、C_1 に流れる円電流 I_1 と C_2 に流れる円電流 C_2(図 7.2 参照) が相互に

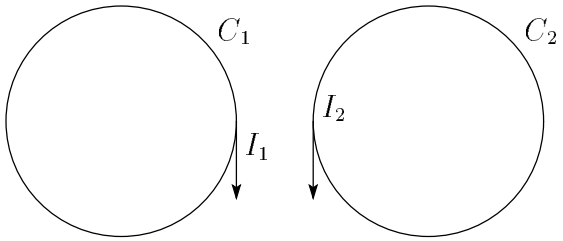


図 7.2: 円電流間の相互作用

及ぼす影響は、(F_{12} は 2 が 1 に及ぼす力)

$$\vec{F_{21}} = \int_{C_2} I_2 d\vec{x_2} \times \vec{B}(\vec{x_2})$$

($\vec{B}(\vec{x_2})$ は I_1 が作る磁場)

$$\vec{F_{12}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{C_1} \int_{C_2} (d\vec{x_1} d\vec{x_2}) \frac{\vec{x_2} - \vec{x_1}}{|\vec{x_1} - \vec{x_2}|^3}$$

第8章　時間的に変化する電磁場

8.1　ファラデーの電磁誘導の法則

図 8.1 で、AB 間の起電力を $\mathcal{E}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
q\mathcal{E} &= \oint_C d\vec{x}\vec{F} \\
&= \int_A^B d\vec{x}\vec{F} = -q \times Bl \quad (\because \vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}))
\end{aligned}
$$

磁束 Φ は、

$$\boxed{\Phi \overset{def.}{=} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = Blv$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{電磁誘導の法則}$$

この式の"-"は、変化をうち消す向きに起電力が生じることを示している (レンツの法則)。

ま、知ってるよな。

一般の場合で考えると、図 8.2 で、ある回路を含む平面 S(ここでは C を含む平面になってるけど) をとるわけだが、磁束の大きさは S の取り方に依らない。なぜならば、C を含む二つの曲面 S_1, S_2 を考えると、図 8.3 で (単磁荷が存在しないから)、

$$
\begin{aligned}
&\int_{S_1} \vec{B}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS - \int_{S_2} \vec{B}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS \\
&= \int_S \vec{B}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS
\end{aligned}
$$

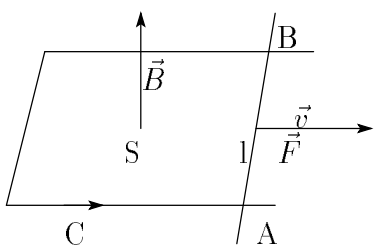


図 8.1: 電磁誘導の法則:磁場固定

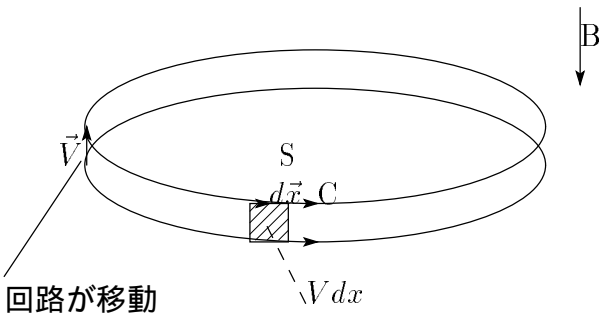


図 8.2: 電磁誘導の法則:一般

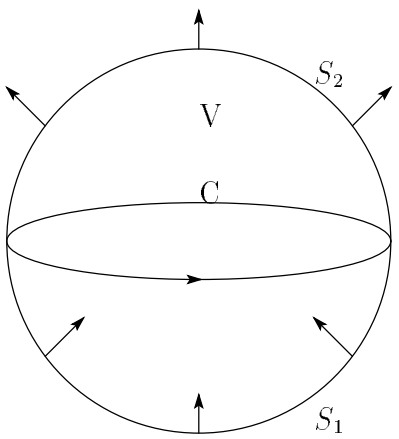


図 8.3: S の不依存

発散定理より

$$= \int_V \mathrm{div}\vec{B}(\vec{x})d^3x$$
$$= 0$$

$$\therefore \Phi_1 = \Phi_2$$

である。S_1, S_2 は任意の曲面なので、ある回路を縁とする曲面がどんな形でも磁束の大きさは変わらない。
(一般の電磁誘導続き)

$$q\mathcal{E} = \int_C d\vec{x}\cdot\vec{F} = q\int d\vec{x}\cdot\vec{v}\times\vec{B}(\vec{x})$$
$$= -q\int \vec{B}(\vec{x})\cdot\vec{v}\times d\vec{x}$$

ここの変形については注[1]を参照。

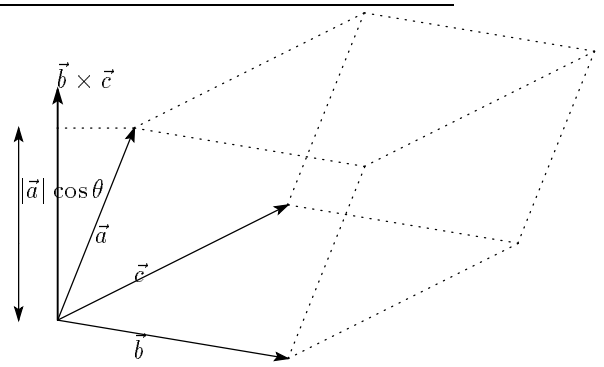
$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\Delta S}\vec{B}(\vec{x})\cdot\vec{n}dS$$

であるが、$\mathcal{E} = -\int \vec{B}(\vec{x})\cdot\vec{v}\times d\vec{x}$, $\dfrac{d\Phi}{dt} = -\mathcal{E}$ から

$$= \oint_C \vec{B}(\vec{x})\cdot\vec{v}\times d\vec{x}$$

と表すこともできる。

磁場が動く場合 (図 8.4) を考えてみよう。電磁誘導の法則と、



[1]

$$V = |\vec{b}\times\vec{c}||\vec{a}|\cos\theta = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

図のように、$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ を外積と内積ひとつずつで結ぶと、斜六面体の体積になって絶対値が等しくなる (符号は外積のベクトルと a の方向の位置関係から分かる)。

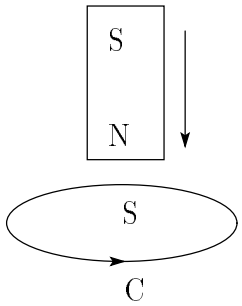


図 8.4: 電磁誘導の法則:磁場が動く

$$\begin{cases} \Phi(t) = \int_S \vec{B}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(\vec{x})dS \\ \mathcal{E} = \oint_C \vec{E}(\vec{x},t)d\vec{x} \end{cases}$$

(定義) から、

$$\oint_C \vec{E}(\vec{x},t)d\vec{x} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(\vec{x})dS$$

これをファラデーの法則の積分型という。
左辺をストークスの定理で書き直すと、

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(\vec{x})dS = -\int_S \frac{\partial\vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t}\cdot\vec{n}(\vec{x})dS$$

$$\therefore \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{\partial\vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t} = 0$$

これをファラデーの法則の微分型という。これは、静電場に関する $\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{x}) = 0$ を一般化したものになっている。

第9章　マクスウェルの方程式と電磁波

9.1　アンペール・マクスウェルの方程式

時間変化を考えたとき、静電場・静磁場の場合と同じ式が成り立つだろうか。もしダメだったら、どのような式に変更したらよいだろうか。

$\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{x},t)=\mu_0\vec{j}(\vec{x},t)$ を 仮定する(背理法)。このとき、

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}+\mathrm{div}\vec{j}(\vec{x},t)=0$$

$\nabla\cdot\nabla\times\vec{B}=0$ になることを利用して (前に証明した)

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{divrot}\vec{B}(\vec{x},t)\\&=\mu_0\mathrm{div}\vec{j}(\vec{x},t)\\&=-\mu_0\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}\neq 0\end{aligned}$$

よって、時間変化がある場合

$$\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{x},t)=\mu_0\vec{j}(\vec{x},t)$$

は成り立たない。
マクスウェルは、

$$\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{x},t)=\mu_0\vec{j}(\vec{x},t)+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t}\left(=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t}+\mu_0\vec{j}(\vec{x},t)\right)$$

(アンペール・マクスウェルの法則) とすると、時間変化がある場合も矛盾がしないとした。実際にやってみよう。

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{divrot}\vec{B}(\vec{x},t)\\&=\mu_0\mathrm{div}\vec{j}(\vec{x},t)+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{E}(\vec{x},t)\\&=\mu_0\mathrm{div}\vec{j}(\vec{x},t)+\mu_0\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}\\&=0\end{aligned}$$

よって、時間的に変動する電磁場では、次のような公式が成り立つ。

真空中の電磁場のマクスウェル方程式

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{x},t) \tag{9.1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t} = 0 \tag{9.2}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}(\vec{x},t) \tag{9.3}$$

$$\mathrm{div}\vec{B}(\vec{x},t) = 0 \tag{9.4}$$

(9.4) は、磁気単極子が存在しないことを示唆している。

9.2 電磁波

1. (9.2) の rot をとって、

$$\mathrm{rotrot} = \mathrm{graddiv} - \nabla^2$$

より、

$$\mathrm{rotrot}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{B} = 0$$
$$(\mathrm{graddiv} - \nabla^2)\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{B} = 0$$

(9.1),(9.3) より、

$$\mathrm{grad}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho - \nabla^2\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \mu_0\vec{j}\right) = 0$$
$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{grad}\rho + \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}$$

2. (9.3) の rot をとって、

$$\mathrm{rotrot}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{E} = \mu_0\mathrm{rot}\vec{j}$$
$$(\mathrm{graddiv} - \nabla^2)\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \mu_0\mathrm{rot}\vec{j}$$
$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = -\mu_0\mathrm{rot}\vec{j}$$

特に、$\rho = 0,\ T = 0$ のとき、

$$\begin{cases} \left(\nabla^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}(\vec{x},t) = 0 \\ \left(\nabla^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B}(\vec{x},t) = 0 \end{cases} \tag{9.5}$$

(9.5) を波動方程式という。

前から c と書いているが、c は $c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$ を満たす定数とする[1]。

波動方程式の簡単な場合 (一方向) を考える。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(z,t) = 0$$

ここで、

$$\begin{cases} u = z - vt \\ w = z + vt \end{cases}$$

と変数変換すると、$(z = \dfrac{1}{2}(u+w),\ t = -\dfrac{1}{2v}(u-w))$ だから

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi(z,t) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial t}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{1}{2v}\dfrac{\partial}{\partial t} \\ \dfrac{\partial}{\partial w} = \dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial t}{\partial w}\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{1}{2v}\dfrac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

である。これを用いて書き直すと、

$$4\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial w}\phi(u,w) = 0$$

とできる。

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w}\phi(u,w) = 0$$

を考える。

$$\frac{\partial}{\partial w}\phi(u,w) = h(w)$$

とおいて、

$$\phi(u,w) = \phi(u,w_0) + \int_{w_0}^{w} h(w')dw'$$

[1] あとから c が光速だと分かるわけだが、ここではそうとは分からない。

$$\phi(u,w) = f(u) + g(w)$$

$$\phi(z,t) = f(z-vt) + g(z+vt)$$

これが一般解。このように電磁波の一般解は進行波と後退波の結合で表される。
これを利用してさらに書き換える。

$$\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial t} = -v(f'(z-vt) - g'(z+vt))$$

$$\phi_0(z) = \phi(z,0) = f(z) + g(z)$$

$$\phi_1(z) = \frac{\partial\phi(z,0)}{\partial t} = -v(f'(z) - g'(z))$$

$$f(z) - g(z) = f(0) - g(0) = \frac{1}{v}\int_0^z \phi_1(z')dz'$$

$$\begin{cases} f(z) = \dfrac{1}{2}\phi_0(t) = \dfrac{1}{2v}\displaystyle\int_0^z \phi_1(z')dz' + \dfrac{1}{2}(f(0)+g(0)) \\ g(z) = \dfrac{1}{2}\phi_0(t) = \dfrac{1}{2v}\displaystyle\int_0^z \phi_1(z')dz' - \dfrac{1}{2}(f(0)-g(0)) \end{cases}$$

$$\phi(z,t) = \frac{1}{2}(\phi_0(z-vt) - \phi_0(z+vt)) + \frac{1}{2v}\int_{z-vt}^{z+vt} \phi_1(z')dz'$$

各点での $t=0$ での値と微分係数を代入して式を決定するという考え方は、(二階の微分方程式を解いているという点では変わらないから) 力学の微分方程式を解く場合と同じ。

さて、$f(z-vt)$ は速度 v で z 軸の正方向に進む波を、$g(z+vt)$ は速度 v で z 軸の負方向に進む波を表している。

z 軸の正方向へ進む波

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} f_x(z-ct) \\ f_y(z-ct) \\ f_z(z-ct) \end{pmatrix}$$

電荷密度が 0 だから (9.1) より $\mathrm{div}\vec{E}(\vec{x},t) = 0$ で、

$$f_z'(z-ct) = 0$$

$$\therefore f_z(z-ct) = \mathrm{const.} = 0$$

つぎに、(9.2) から $\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{x},t) + \dfrac{\partial\vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t} = 0$ より、

$$\frac{\partial\vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}f_y(z-ct) \\ -\frac{\partial}{\partial z}f_x(z-ct) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c}f_y(z-ct) \\ \frac{1}{c}f_x(z-ct) \\ 0 \end{pmatrix} + \text{const.}(= 0 \text{ とできる}) = \frac{1}{c}\vec{e_z} \times \vec{E}(\vec{x},t)$$

これを見ると、<u>電磁波の進行方向と磁場と電場は、互いに直交する</u> ことが分かる。
すなわち

$$\vec{e_z} \cdot \vec{E} = \vec{e_z} \cdot \vec{B} = \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

が成り立つ。
一般の方向 $\vec{n}$ に進む波については、

$$\vec{n} \cdot \vec{e_1} = \vec{n} \cdot \vec{e_2} = \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = 0$$

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{x},t) = \vec{e_1} f_1(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct) + \vec{e_2} f_2(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct) \\ \vec{B}(\vec{x},t) = -\dfrac{1}{c}\vec{e_1} f_1(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct) + \dfrac{1}{c}\vec{e_2} f_2(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct) = \dfrac{1}{c}\vec{n} \times \vec{E}(\vec{x},t) \end{cases}$$

このとき、前と同様に

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = \vec{n} \cdot \vec{B} = \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

となる。
三次元の場合の一般解はというと、

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{x},t) = \displaystyle\sum_n c_n \vec{E_n}(\vec{x},t) \\ \vec{B}(\vec{x},t) = \displaystyle\sum_n d_n \vec{B_n}(\vec{x},t) \end{cases}$$

となる。ただし、

$$\begin{cases} \vec{E_n}(\vec{x},t) = \vec{e_\lambda} \begin{cases} \sin(\vec{k_n} \cdot \vec{x} - \omega_n t) \\ \cos(\vec{k_n} \cdot \vec{x} - \omega_n t) \end{cases} \\ \vec{B_n}(\vec{x},t) = \vec{e_\lambda} \begin{cases} \sin(\vec{k_n} \cdot \vec{x} - \omega_n t) \\ \cos(\vec{k_n} \cdot \vec{x} - \omega_n t) \end{cases} \end{cases} \quad , \omega_n^2 = c^2 \vec{k_n}^2 , \omega_n = 2\pi\nu_n , \nu_n : \text{振動数}$$

試験には、静電場・静磁場・電磁誘導・電磁波の問題がそれぞれ出るらしい。

以上

typeset by LaTeX 2_ε