振動・波動論

040813F 志村晴季

平成 13 年 2 月 16 日

目 次

1　調和振動

1.1　基本

1.2　複素数表示

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = r\cos(\omega t + \delta) \\ y = r\sin\theta = r\sin(\omega t + \delta) = r\cos\theta\left(\omega t + \delta - \frac{1}{2}\pi\right) \quad \text{位相が遅れている。} \end{cases}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = -F_c\cos\theta = -mr\omega^2\cos\theta = -m\omega^2 x$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2}x = -\omega^2 x$$

このようにして、円運動は調和振動の二次元的な合成として表すことができる。
$*$ 一般的に、調和振動を二次元的に組み合わせた振動はリサージュ図形を描く。すなわち、

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ y = A_2\cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{cases}$$

例

$$\begin{aligned}
&A_1 = A_2, \omega_1 = \omega_2, \delta_1 = \delta_2 \to && \text{直線 } y = x \\
&A_1 = A_2, \omega_1 = \omega_2, \delta_1 - \delta_2 = \frac{1}{2}\pi && \to \text{円} \\
&A_1 = A_2, \omega_1 = \omega_2, \delta_1 - \delta_2 = \frac{1}{4}\pi && \to \text{傾いた楕円} \\
&A_1 = A_2, 2\omega_1 = \omega_2, \delta_1 = \delta_2 && \to \text{放物線} \\
&A_1 = A_2, 2\omega_1 = \omega_2, \delta_1 - \delta_2 = \frac{\pi}{4} && \to \text{下図のような形。}
\end{aligned}$$

調和振動子

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)x = 0 \quad \leftarrow \text{微分演算}$$

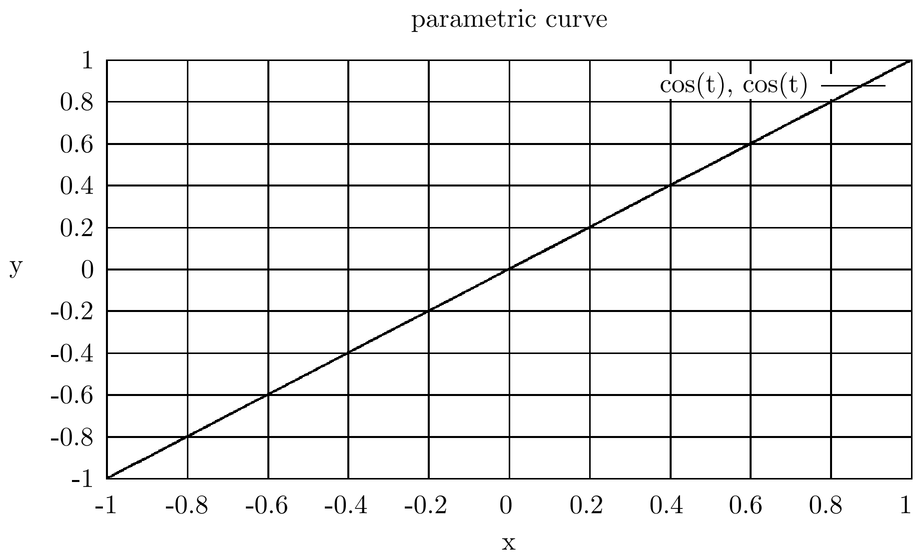


図 1: $A_1 = A_2, \omega_1 = \omega_2, \delta_1 = \delta_2$

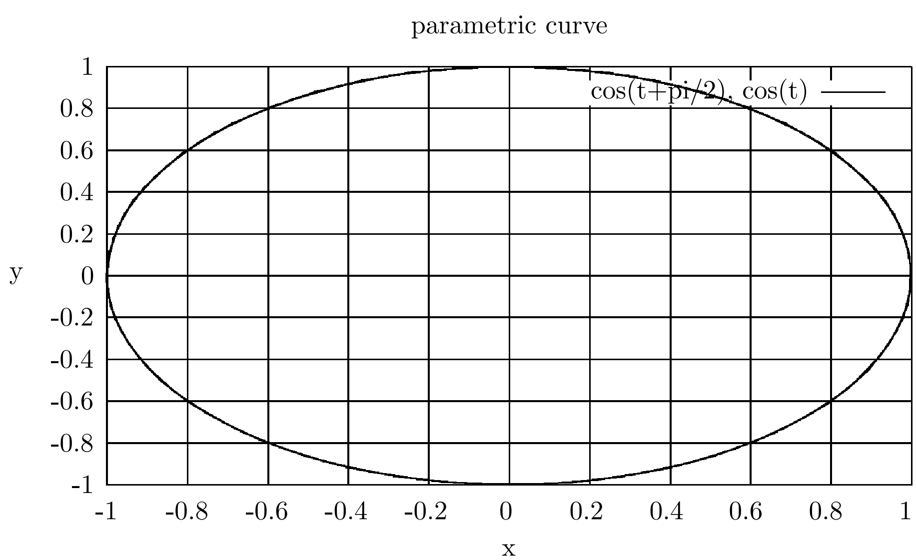


図 2: $A_1 = A_2, \omega_1 = \omega_2, \delta_1 - \delta_2 = \dfrac{1}{2}\pi$

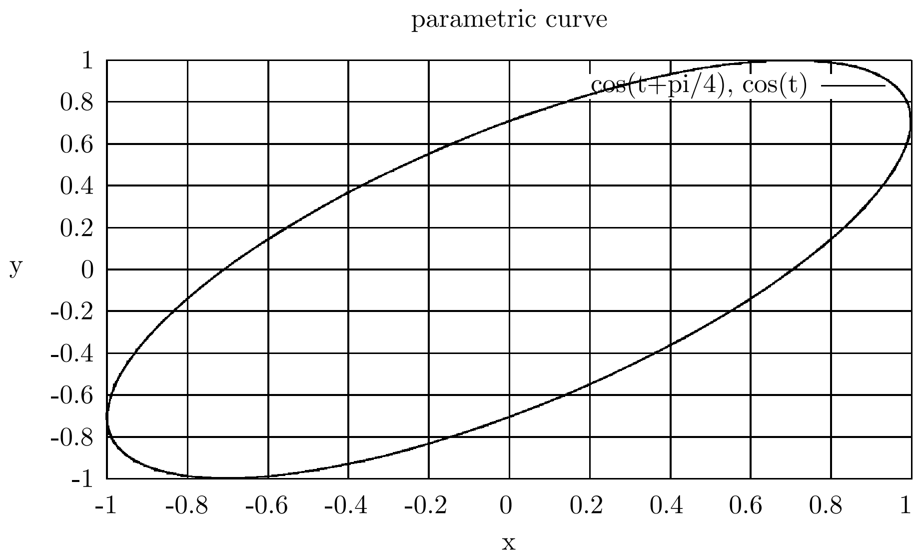


図 3: $A_1 = A_2, \omega_1 = \omega_2, \delta_1 - \delta_2 = \frac{1}{4}\pi$

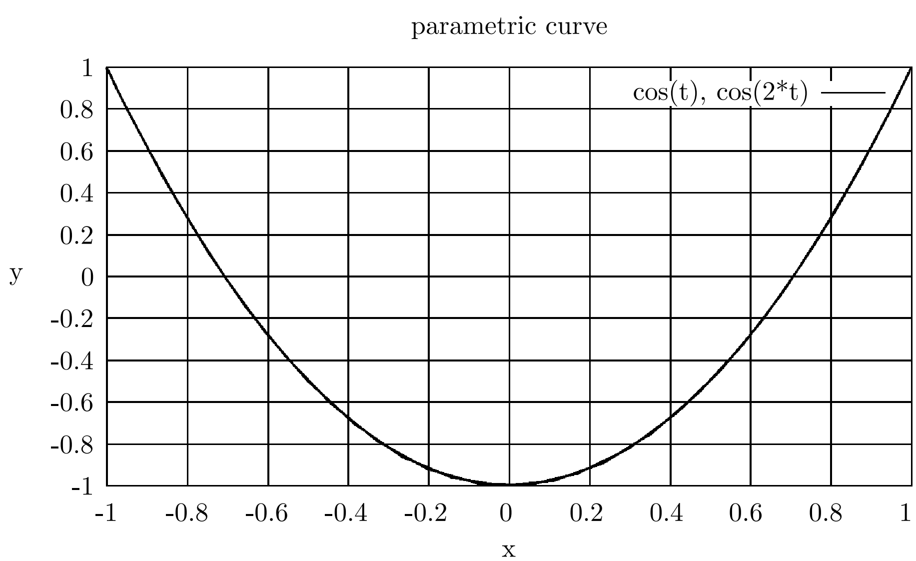


図 4: $A_1 = A_2, 2\omega_1 = \omega_2, \delta_1 = \delta_2$

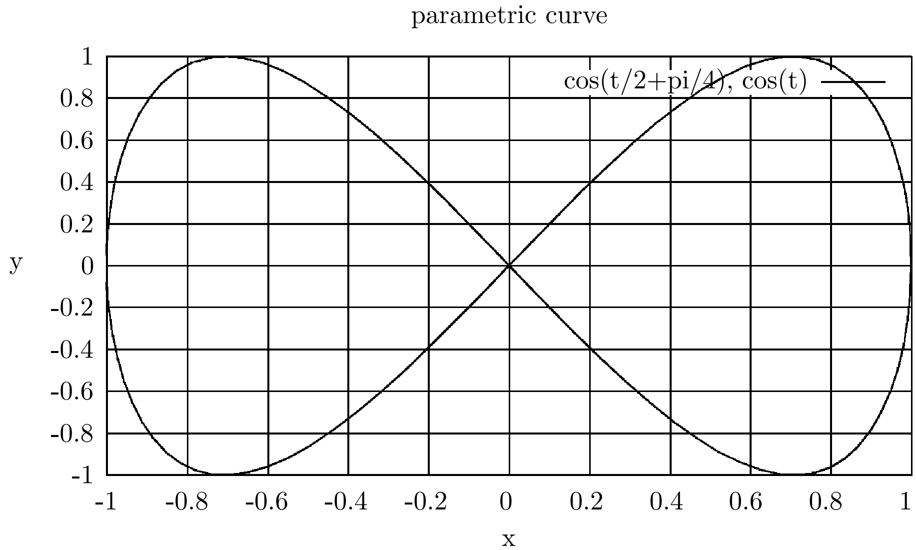


図 5: $A_1 = A_2, 2\omega_1 = \omega_2, \delta_1 - \delta_2 = \dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{d^2}{dt^2} = \dfrac{d}{dt} \cdot \dfrac{d}{dt}$ であるから、

$$\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 = \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)$$
$$\therefore \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right) x = 0$$

$*$ここで $\dfrac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$ なので、(当然)

解)

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right) x = 0 \qquad \Rightarrow x(t) = e^{i\omega t}$$
$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right) x = 0 \qquad \Rightarrow x(t) = e^{-i\omega t}$$

斉次線形微分方程式の解は、重ね合わせの原理を用いて

$$x(t) = c_+ e^{i\omega t} + c_- e^{i\omega t}$$

さて、$x(t) \in \mathbb{R}$ より、

$$x^*(t) = c_+^* e^{i\omega t} + c_i^* e^{i\omega t}$$
$$c_+^* = c_-, c_+ = c_-^*$$
$$c_+ = \frac{A}{2} e^{i\delta}, c_- = \frac{A}{2} e^{-i\delta}$$
$$x(t) = \frac{A}{2} e^{i\delta} e^{i\omega t} + = \frac{A}{2} e^{-i\delta} e^{-i\omega t} = \frac{A}{2} e^{i(\omega t + \delta)} + \frac{A}{2} e^{-i(\omega t + \delta)} = A\cos(\omega t + \delta)$$

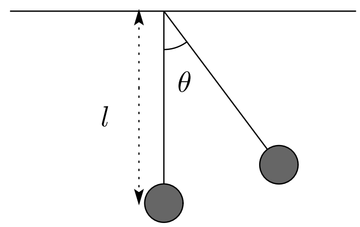


図 6: 振り子

1.3　ポテンシャルと調和近似

保存力:$F(x) = -\dfrac{dV(t)}{dx}$ となる $V(x)$ が存在する。
運動方程式を立てると、

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = F = -\frac{dV}{dx} \quad \cdots \text{保存力 (例 : } -kx)$$
$$m\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{dV}{dx} = 0$$

両辺に $\dfrac{dx}{dt}$ をかけて、

$$m\frac{d^2}{dt^2}x\frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V\right) = 0$$
$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V = E \quad \leftarrow \text{保存量 (エネルギー)}$$

当然だが、$\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$ が運動エネルギーで、V がポテンシャルである。

ポテンシャル $V(x)$ を、x に関する滑らかな関数とする。
極小点 x_0 のまわりに Taylor 展開して、

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$$

極小点 x_0 において、$V'(x_0) = 0$ なので、2 次以降の項を無視すると、極小点まわりの微小振動は調和振動と記述することができる。

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -gm\sin\theta$$
$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -gm\sin\theta$$

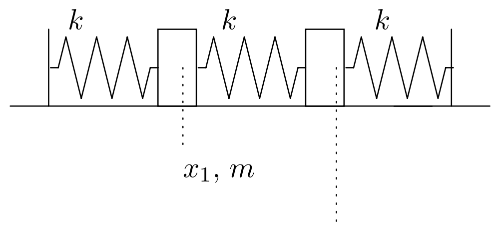


図 7: 連成振動

$\sin\theta \approx \theta$ より、

$$
\begin{aligned}
&l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta \\
&\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^2\theta \quad (\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}
\end{aligned}
$$

ここまでは常識。これを振り子の「ポテンシャル」を使って考えてみよう。

$$
\begin{aligned}
&h = l - l\cos\theta \\
&V(x) = gm(l - l\cos\theta) = gml(1-\cos\theta) = l\theta \\
&-\frac{dV}{ds} = -\frac{dV}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = -gml\sin\theta
\end{aligned}
$$

もし、振り子が回転できるようならば、コサインカーブが続いていく。

$*$ サイクロイド振り子:サイクロイド状の軌道を運動するおもりは、完全に調和振動する。

1.4 減衰振動

速度に比例した抵抗を受ける運動であるが、これは一学期の力学の授業であったので省略する。

2 連成振動

2.1 自由度 2 の連成振動

x_1, x_2 は平衡の位置からのずれを表している。
さて、運動方程式を立てると

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \tag{1}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_2 = -kx_2 + k(x_1 - x_2) = -2kx_2 + kx_1 \tag{2}$$

$(1)+(2)$ より、

$$\begin{cases} 左辺: m\dfrac{d^2}{dt^2}x_1 + m\dfrac{d^2}{dt^2}x_2 = m\dfrac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) \\ 右辺: -2k(x_1+x_2)+k(x_1+x_2) = -k(x_1+x_2) \end{cases}$$

$X = \dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$ なる重心座標を考えると、

$$m\frac{d^2}{dt^2}X = -kX$$

$\omega_I = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の調和振動子とすると、

$X = A_I\cos(\omega_I t + \delta_I)$ とできる。

$(1)-(2)$ より、

$$\begin{cases} 左辺: m\dfrac{d^2}{dt^2}x_1 - m\dfrac{d^2}{dt^2}x_2 = m\dfrac{d^2}{dt^2}(x_1-x_2) \\ 右辺: -2k(x_1-x_2)+k(x_2-x_1) = -3k(x_1-x_2) \end{cases}$$

$x = x_1 - x_2$(相対座標) ととると、

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = -3kx$$

$\omega_{II} = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$ の調和振動子とすると、

$$x = 2A_{II}\cos(\omega_{II}t + \delta_{II})$$

$A_I, \delta_I, A_{II}, \delta_{II}$ は独立な任意変数である。

一般解は、

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{2}(x_1+x_2) = A_I\cos(\omega_1 + \delta_I) \\ x = x_1 - x_2 = 2A_{II}\cos(\omega_{II} + \delta_{II}) \end{cases}$$

より、

$$\begin{cases} x_1 = X + \dfrac{1}{2}x = A_I\cos(\omega_I + \delta_I) + A_{II}\cos(\omega_{II} + \delta_{II}) \\ x_2 = X + \dfrac{1}{2}x = A_I\cos(\omega_I + \delta_I) - A_{II}\cos(\omega_{II} + \delta_{II}) \end{cases}$$

ここで、初期化の例として $x_1(0)=d, \dot{x_1}(0)=0, x_2(0)=0, \dot{x_2}(0)=0$ として解くと、

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}d(\cos(\omega_1 t)+\cos(\omega_{II}t)) = d\cos\left(\dfrac{1}{2}(\omega_I+\omega_{II})t\right)\cos\left(\dfrac{1}{2}(\omega_I-\omega_{II})t\right) \\ x_2 = d\sin\left(\dfrac{1}{2}(\omega_I+\omega_{II})t\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}(\omega_{II}-\omega_I)t\right) \end{cases}$$

ちなみに、$\sin\left(\dfrac{1}{2}(\omega_{II}-\omega_I)t\right)$ あたりがうなりになる。

独立なふたつの座標 (この場合は X と x) を $\boxed{\text{基準座標}}$、その上で観察できる運動を $\boxed{\text{基準モード}}$ という。

$*$ もし k が k' だったら? 以下このような場合もあわせて一般的な場合を考えよう。

2.2 一般的な、自由度 2 の連成振動の解き方

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$ とおくと、$(c_1, c_2 : const)$

$$\begin{aligned} &-\omega^2\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = -\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \\ &\therefore \omega^2\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ω:固有値、$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$: 固有ベクトル

$$\omega^2\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{であるから、}$$

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - K_{11} & -K_{12} \\ -K_{21} & \omega^2 - K_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\omega^2 - K_{11})c_1 - K_{12}c_2 = 0 \tag{3}$$
$$-K_{21}c_1 + (\omega_2 - K_{22})c_2 = 0 \tag{4}$$

$c_1 \neq 0$ のとき、

$(3) \times (\omega^2 - K_{22}) + (4) \times K_{21}$ より、

$$
\begin{aligned}
&(\omega_2 - K_{11})(\omega_2 - K_{22}) - K_{12}K_{21})\, c_1 = 0 \\
&(\omega_2 - K_{11})(\omega_2 - K_{22}) - K_{12}K_{21} = 0 \\
&\therefore \frac{c_2}{c_1} = \frac{\omega^2 - K_{11}}{K_{12}}
\end{aligned}
$$

ここで、$\begin{vmatrix} \omega^2 - K_{11} & -K_{12} \\ -K_{21} & \omega^2 - K_{22} \end{vmatrix} = 0$ である。(でないと、c_1, c_2 が 0 になってしまう)

$\omega^2 = \lambda$ とおくと、

$$
\lambda^2 - (K_{11} + K_{22})\lambda + K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21} = 0
$$

解は、

$$
\boxed{\lambda = \frac{1}{2}\left((K_{11} + K_{22}) \pm \sqrt{(K_{11} - K_{22})^2 + 4K_{12}K_{21}}\right)}
$$

[1]さて、それぞれに対応する固有ベクトルは、

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_\pm \end{pmatrix} \\
&\mu_\pm = \frac{c_2}{c_1} \\
&\mu_\pm = \frac{\lambda_\pm^2 - K_{11}}{K_{12}} = \frac{1}{2K_{12}}\left((K_{11} + K_{22}) \pm \sqrt{(K_{11} - K_{22})^2 + 4K_{12}K_{21}}\right) \\
&\mathbf{e_I} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_{II}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_{II} \end{pmatrix} \text{ とすると、} \\
&K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \begin{cases} K_{eI} = \omega_I^2 \mathbf{e_I} \\ K_{eII} = \omega_{II}^2 \mathbf{e_{II}} \end{cases}
\end{aligned}
$$

一般解は、

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_I \cos(\omega_I t + \delta_I)\mathbf{e}_- + A_{II} \cos(\omega_{II} t + \delta_{II})\mathbf{e}_+
$$

[1] ω_I が λ_-、ω_{II} が λ_+ に対応する。

となる。

証明)

$$\frac{d^2}{dt^2}x =$$

[行列の対角化 (2 次の場合)]
$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ は K の固有ベクトル。

$$P = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$$

とする。λ を K の固有値として、

$$\begin{aligned} KP &= (K\mathbf{e_1}, K\mathbf{e_2}) \\ &= (\lambda_1\mathbf{e_1}, \lambda\mathbf{e_2}) \\ &= (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= PK' \end{aligned}$$

ここまでが重要!!

ただし、

$$K' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

:K の固有値を対角成分とする対角行列。

$$KP = PK'$$

P が逆行列をもつとする ($detP \neq 0$)。すなわち正則行列。
すると

$$P^{-1}KP = P^{-1}PK' = K'$$

よって、

$$PP^{-1}KPP^{-1} = K = PKP^{-1}$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -K\mathbf{x} = -PK'P^{-1}\mathbf{x}$$

両辺に左から P^{-1} をかけて、

$$\begin{aligned} P^{-1}\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} &= -P^{-1}PK'P^{-1}\mathbf{x} \\ \frac{d^2}{dt^2}P^{-1}\mathbf{x} &= -K'P^{-1}\mathbf{x} \end{aligned}$$

$\mathbf{x}' = P^{-1}\mathbf{x}$ とおいて、

$$\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} = -K'\mathbf{x}'$$

こうして、運動方程式を対角化することができた。
ex.)

$$K = \begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & \frac{-k}{m} \\ \frac{-k}{m} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

とすれば、
固有値

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{k}{m} = \omega_1^2 \\ \lambda_2 = \frac{3k}{m} = \omega_2^2 \end{cases}$$

固有ベクトル

$$\mathbf{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(規格化)
すると、

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}KP &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{2k}{m} & -\dfrac{k}{m} \\ -\dfrac{k}{m} & \dfrac{2k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{k}{m} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{k}{m} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2}}\dfrac{k}{m} & -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\dfrac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{k}{m} & 0 \\ 0 & \dfrac{3k}{m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

さて、先ほど導入した $\mathbf{x}'$ が**基準座標**となる。この場合は

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} = -K'\mathbf{x}' \quad : \quad \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\frac{d^2x_1'}{dt^2} = -\lambda_1 x_1'$$

一般的には、

$$\frac{d^2x_i'}{dt^2} = -\lambda_i x_i' \quad (\lambda_i = \omega_1^2)$$

これを i-モードの運動方程式 (単振動) という。
次に、この前考えた連成振動のポテンシャルを別の観点からみてみる。記号などは前と同じ。

$$\begin{aligned}
m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}V(x_1, x_2) \\
m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k(x_2 - x_1) - kx_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}V(x_1, x_2) \\
V(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \text{const.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \text{const.} \\
&= \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \text{const.} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + k\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \text{const.} \\
&= \frac{1}{2}kx'^2_1 + \frac{3}{2}kx'^2_2 + \text{const.}
\end{aligned}$$

このポテンシャルはどうなるだろうか。(グラフ)

2.5 自由度 N の連成振動 (固定端)

N+1 個のばねによって、位置 x_i のおもり (すべて重さ N) が繋がっているものの振動を考える。
運動方程式をたてると、

$$\begin{aligned}
m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= kx_0^* - kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \\
m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) = kx_1 - 2kx_2 + kx_3 \\
&\vdots \\
m\frac{d^2x_n}{dt^2} &= -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n) = kx_{n-1} - 2kx_n + kx_{n+1} \\
m\frac{d^2x_N}{dt^2} &= -k(x_N - x_{N-1}) + kx_N = kx_{N-1} - 2kx_N + kx_{N+1}^*
\end{aligned}$$

$*$ は便宜上、一般的なかたちをつくるために入れたもので、

$$x_0 = x_{N+1} = 0$$

である。これを拘束条件 (境界条件) という。
K を行列形で表すと、

$$K = \begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} & & \vdots \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{k}{m} \\ 0 & \cdots 0 & \ddots & -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

ある基準振動の振動数を ω とする。

$$x_n(t) = v_n \cos(\omega t + \delta)$$

とおく。

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2} = -m\omega^2 v_n \cos(\omega t + \delta)$$

$$k(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}) = k\cos(\omega t + \delta)(v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1})$$

$$-m\omega^2 v_n = k(v_{n-1} + v_{n+1} - 2v_n)$$

$v_n = A\sin(n\alpha + \phi)$ とおく。

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = -2\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} v_{n-1} + v_{n+1} &= A\left(\sin\left((n-1)\alpha + \phi\right) + \sin\left((n+1)\alpha + \phi\right)\right) \\ &= 2A\sin(n\alpha + \phi)\cos\alpha \end{aligned}$$

よって、

$$-m\omega^2 = k(2\cos\alpha - 2)$$

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}(1 - \cos\alpha) = \frac{2k}{m}2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{4k}{m}\sin^2\frac{\alpha^2}{2}$$

拘束条件

$$x_0 = v_0\cos(\omega t + \delta) = 0, \quad v_0 = 0$$

から、

$$v_0 = sin(0 \times \alpha + \phi) = A\sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

$$x_{N+1} = v_{N+1}\cos(\omega t + \delta) = 0, \quad v_{N+1} = 0$$

$$v_{N+1} = A\sin\left((N+1)\alpha\right) = 0$$

$$(N+1)\alpha = i\pi \quad (i \in N)$$

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{i\pi}{N+1} \text{とおく。} (i = 1, \cdots, N) \\ \omega_i = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\frac{\alpha_i}{2} \end{cases}$$

この ω_i を「i モードの固有振動数」という。

この重ね合わせで一般解がつくれる。

$$\boxed{x_n(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \sin(n\alpha_i)\cos(\omega_i t + \delta_i)}$$

A_i, δ_i は初期条件だけで決まる。

2.6 自由度 N の連成振動 (自由端)

自由端の場合の拘束条件 (境界条件) は、次のようになる。まず、

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1 - x_0) + k(x_2 - x_1) = k(x_2 - x_1)$$

より、「$x_0 = x_1$」。
同様に「$x_{N+1} = x_N$」である。
このとき、

$$v_0 = v_1 \Rightarrow sin\phi = sin(\alpha + \phi)$$
$$0 = sin(\alpha + \phi) - sin\phi = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \phi)\right)\sin\frac{\alpha}{2}$$

よって、

$$\frac{\alpha}{2} + \phi = \pm\frac{\pi}{2}$$
$$v_N = v_{N+1} \Rightarrow \sin(N\alpha + \phi) = \sin((N+1)\alpha + \phi)$$
$$0 = \sin((N+1)\alpha + \phi) - \sin(N\alpha + \phi) = 2\cos\left(N\alpha + \frac{\alpha}{2} + \phi\right)\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\left(N\alpha + \frac{\alpha}{2} + \phi\right) = -\sin N\alpha = 0$$

$\frac{\alpha}{2} + \phi = \pm\frac{\pi}{2}$であるから、

$$N\alpha = i\pi$$
$$\therefore \alpha_i = \frac{i\pi}{N} \quad i = 1, \cdots, N-1$$

これが自由端の場合である。なぜ N がひとつ減っているかといえば、重心運動 (等速直線運動) のせいで振動の自由度がひとつ減っているからである。

2.7 連続体極限

先ほどの運動方程式を、連続関数として解くのが目標
固定端で N 個の物体が繋がっているのを考える。平衡点間隔を a とすると、
全体の長さ $L = (N+1)a$, 左端から n 番目の物体までの距離 $z = na$ である。

$u(t,z)$ を考える。

$x_n(t) = u(t, na)$ として、

$x_n(t) - x_{n-1}(t) = u(t, na) - u(t, (n-1)a)$

n,a について二変数関数のテイラー展開を施して、

$$u(t,(n-1)a) = u(t,na) + \frac{\partial u}{\partial t}(t,na)(-a) + \cdots$$

$$x_n(t) - x_{n-1}(t) = a\frac{\partial u}{\partial z}(t,na)$$

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = a\frac{\partial u}{\partial z}(t,(n+1)a)$$

$$[x_{n+1}(t) - x_n(t)] - [x_n(t) - x_{n-1}(t)] = a\left[\frac{\partial u}{\partial z}(t,(n+1)a - \frac{\partial u}{\partial z}(t,na)\right] = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t,na)$$

さて、連続関数を使って考えると、

$$(\text{運動方程式の左辺}) = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ka^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

すなわち、$\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{ka^2}{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}}$

$$\frac{ka^2}{m} = \frac{ka}{\frac{m}{a}} = \frac{F}{\sigma}$$

$\because ka = F(\text{力}), \dfrac{m}{a} = \sigma(\text{単位長さあたりの質量密度})$
さて、次元解析してみよう。

$$\left[\frac{F}{\sigma}\right] = \frac{[f]}{[\sigma]} = \frac{[MLT^{-2}}{[ML^{-1}]} = [L^2T^{-2}] = [(\text{速さ})^2]$$

$v^2 \equiv \dfrac{F}{\sigma}$ と定義すると、次のような偏微分方程式を導くことができる。
$\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$ これを波動方程式 (wave equation) という。
次の項では、全く違ったやり方でこの波動方程式を導出してみる。

3 連続体の振動

3.1 弦の運動方程式

固定端の弦について[2]、位置 x, 時刻 t での横方向の変位を $u(t,x)$ とおく。
さて、張力のつり合いを考えてみよう。

[2]弦が固定端じゃないってのも変だが、あとで自由端も考える。これは端に固定するときに、棒に滑らかな「輪」をつけた弦を固定する場合などである。

x 方向の力[3]のつり合いは、

$$F_x = T' \cos\theta' - T\cos\theta \simeq T' - T = 0$$
$$\Rightarrow T' = T$$

y 方向の力[4]のつり合いは、

$$\begin{aligned} F_y &= T' \sin\theta' - T\sin\theta \\ &\simeq T'\theta' - T\theta \\ &= T(\theta' - \theta) \end{aligned}$$

$\tan\theta = \dfrac{\partial u}{\partial z}$であり、$\tan\theta \simeq \theta$ であるから、

$$\begin{aligned} F_y &= T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) \\ &= T\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

弦の質量 $\Delta m = \sigma\Delta x \quad \sigma$: 単位長さあたりの弦の質量 とすると、y 方向の運動方程式は

$$\Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_y = T\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$\sigma\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

すなわち、$\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{T}{\sigma}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$

3.2 弦の振動の基準モード

$$u(t,x) = A\sin(kx+\phi)\cos(\omega t + \delta)$$
$$\leftrightarrow \text{(対応)} \quad x_n(t) = A\sin(n\alpha + \phi)\cos(\omega t + \delta)$$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u(t,x), \quad m\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 u(t,x)$ より、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$\Rightarrow -\omega^2 u = -v^2 k^2 u$$

$\boxed{\Rightarrow \omega = vk} \quad \leftrightarrow$ (対応) $\quad \omega = 2\sqrt{\dfrac{k}{m}\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

連続関数の場合、境界条件はどうなるだろうか。

[3]教官はこれを「縦方向」と呼んでいた。

[4]教官はこれを「横方向」と呼んでいた。

1. 固定端の場合

$$
\begin{aligned}
&u(t,0)=u(t,L)=0\\
&u(t,0)=A\sin\phi\cos(\omega t+\delta)=0 \quad \Rightarrow \quad \phi=0\\
&u(t,L)=A\sin(kL)\cos(\omega t+\delta)=0 \quad kL=i\pi, i=1,2,\cdots,\infty
\end{aligned}
$$

すなわち、$\boxed{k_i=\frac{i\pi}{L}}$,$\boxed{\omega_i=vk_i=v\frac{i\pi}{L}}$

2. 自由端の場合はどうなるだろうか[5]。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,L)=0\\
&\leftrightarrow (\text{対応}) \begin{cases} x_0=x_1\\ x_{N+1}=x_N \end{cases}
\end{aligned}
$$

境界条件は、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=kA\cos(kx+\phi)\cos(\omega t+\delta)\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=kA\cos\phi\cos(\omega t+\delta)=0\\
&\Rightarrow \phi=\frac{\pi}{2}\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(t,L)=kA\cos\left(kL+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\omega t+\delta)=0
\end{aligned}
$$

よって$\boxed{kL=i\pi}$ $\boxed{k_i=\frac{i\pi}{L}}$
図で書くと次のようになるわけ。

3. 片方が固定端、片方が自由端の場合
境界条件は、

$$
u(t,0)=0,\frac{\partial u}{\partial x}(t,L)=0
$$

である。このとき、

$$
\begin{aligned}
&\phi=0\\
&\cos(kL)=0 \Leftrightarrow kL=\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow k_i=\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi}{L} \quad (i=1,2,\cdots,\infty)\\
&\therefore u(t,x)=A\sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\cos(\omega t+\delta), \quad \omega=vk=\frac{v}{2L}\pi
\end{aligned}
$$

この場合のモードは次のようになる。

[5]自由端で弦を張る場合は、弦に輪を取り付け、二本の棒の間に張るなどのモデルを考える (ってさっき書いたじゃん)。

3.3 弦の振動の一般解とフーリエ分解

重ね合わせの原理によってできる波が「一般解」、それを正弦波に分解するのがフーリエ分解。

弦の振動の一般形

$$u(t,x) = \sum_{i=1} A_i \sin(k_i x + \phi)\cos(\omega_i t + \delta_i)$$

残る自由度 $A_i, \delta_i (i = 1, \cdots, \infty)$ は初期条件 (initial condition) によって決まる。
具体的には

$$\begin{cases} u(0,x) = f(x) \\ v(0,x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) \end{cases}$$

境界条件は (以下、しばらく固定端で考える)、

$$f(0) = f(L) = 0$$

このとき、$\phi = 0$

$$\begin{cases} u(0,x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(k_i x)\cos\delta_i = f(x) \\ v(0,x) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} A_i \omega_i \sin(k_i x)\sin\delta_i = g(x) \end{cases}$$

$A_i \cos\delta_i = a_i$ とおくと、

$$u(0,x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(k_i x) = f(x)$$

$-A_i \omega_i \sin\delta_i = b_i$ とおくと、

$$v(0,i) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin(k_i x) = g(x)$$

この a_i を求めたい。ここで、$\boxed{\text{フーリエの方法}}$を使う。

< フーリエの方法 >

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(k_i x) \text{ の } a_i \text{を求める。}$$

両辺に $\sin(k_j x)$ をかけて、x で 0 から L まで積分する。

左辺 : $$\int_0^L dx f(x)\sin(k_j x)$$

右辺 : $$\int_0^L \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(k_i x)\sin(k_j x)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_0^L dx \sin(k_i x)\sin(k_j x)$$

$\int_0^L dx \sin(k_i x)\sin(k_j x)$ を I_{ij} とおく。

$$I_{ij} = \int_0^L dx \sin(k_i x)\sin(k_j x)$$

$$\sin(k_i x)\sin(k_j x) = \frac{1}{2}\left(\cos(k_i - k_j)x - \cos(k_i + k_j)x\right)$$

$i \neq j$ のとき、$k_i + k_j \neq 0, k_i - k_j \neq 0$

$$I_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k_i - k_j}\sin((k_i - k_j)x) - \frac{1}{k_i + k_j}\sin((k_i + k_j)x)\right]_0^L = 0$$

$$\sin((k_i - k_j)L) = \sin\left(\left(\frac{i\pi}{L} - \frac{j\pi}{L}\right)L\right) = \sin((i-j)\pi)$$
$$\sin((k_i + k_j)L) = \sin((i+j)\pi) = 0$$

$i = j$ のとき、

$$I_{ij} = \frac{1}{2}\int_0^L dt - \frac{1}{2}\int_0^L dt \cos((k_i + k_j)x) = \frac{L}{2}$$

まとめれば、

$\boxed{I_{ij} = \frac{1}{2}L\delta_{ij}}$

ただし

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

これを用いて、

$$(\text{右辺}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i I_{ij} = \frac{1}{2}La_j = (\text{左辺})$$

$$\frac{1}{2}La_j = \int_0^L dx f(x)\sin(k_j x)$$

よって、

$\boxed{a_i = \frac{2}{L}\int_0^L dx f(x)\sin(k_i x)}$これを**フーリエ係数**という。

< 例題 >

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2a}{L}x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2a}{L}(L-x) & \frac{L}{2} < a < L \end{cases}$$

のとき a_i を求めよ。

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{2}{L}\int_0^L dx f(x)\sin(k_i x) \\ &= \frac{2}{L}\left[\int_0^{\frac{L}{2}} dx \frac{2a}{L}x\sin(k_i x) + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{2a}{L}(L-x)\sin(k_i x)\right] \end{aligned}$$

$L - x = y$ とおく。

$k_i L = i\pi$ を用いて、

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{L}{2}}^L dx\frac{2a}{L}(L-x)\sin(k_i x) = -\int_{\frac{L}{2}}^0 dy\frac{2a}{L}y\sin(k_i L - k_i y) = \int_0^{\frac{L}{2}} dy\frac{2a}{L}y(-sin(k_i y - i\pi)) \\ &= \begin{cases} -\int_0^{\frac{L}{2}} dy\frac{2a}{L}y\sin(k_i y) & (i: \text{偶数}) \\ \int_0^{\frac{L}{2}} dy\frac{2a}{L}y\sin(k_i y) & (i: \text{奇数}) \end{cases} \end{aligned}$$

よって、

$$a_i = \begin{cases} 0 & (i: \text{偶数}) \\ \frac{2}{L}\times\frac{2a}{L}\times 2\int_0^{\frac{L}{2}} dx x\sin(k_i x) = \frac{8a}{L^2}\left[-\frac{x}{k_i}\cos(k_i x) + \frac{1}{k_i^2}\sin(k_i x)\right]_0^{\frac{L}{2}} & (i: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$\cos\left(k_i\frac{L}{2}\right) = (i = 2n+1 \text{ として})\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\frac{L}{2}\right) = \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = -\sin(n\pi) = 0$$

$$\sin\left(k_i\frac{L}{2}\right) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\frac{L}{2}\right) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = \cos(n\pi)$$

$$a_i = \frac{8a}{L^2 k_i^2}\cos(n\pi) = \frac{8a}{L^2\frac{(2n+1)^2\pi^2}{L^2}}\cos(n\pi) = \frac{8a}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(n\pi)$$

と求まる[6]。また

$$v(0,x) = -\sum A_i\omega_i \sin(k_i x)\sin\delta_i = g(x) = 0$$

より、

$$A_i\omega_i\sin\delta_i = 0 \Leftrightarrow \delta_i = 0$$

< フーリエ級数展開とベクトル空間 >
3 次元のベクトル $\mathbf{x} = (a_1, a_2, a_3)$ を考える。このとき、

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + a_3\mathbf{e_3}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e_1} = (1,0,0) \\ \mathbf{e_2} = (0,1,0) \\ \mathbf{e_3} = (0,0,1) \end{cases}$$

n 次元のベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ について考えれば、

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e_i}$$

内積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は、

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

と表せる。$\mathbf{e_i}\mathbf{e_j} = \delta_{ij}$(直交単位ベクトル) とする。

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e_i}$$

であるから、

$$a_i = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e_i}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\sin(k_i x) \quad (\sin(k_i x) \text{ が } \mathbf{e_i} \text{ に対応。直交関数系である})$$

$$a_i = \frac{2}{L}\int_0^L dx f(x)\sin(k_i x) \quad \text{これが } \mathbf{a}\cdot\mathbf{e_i} \text{ に対応}$$

$$(f,g) = \frac{2}{L}\int_0^L dx f(x)g(x)$$

[6] どのような運動をするだろうか?

これを内積の定義とできる?

< 自由端の場合の一般解 >
条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,L)=0$$

であった。

$$\begin{cases} u(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\cos(k_i x)\cos(\omega_i t+\delta_i) \\ v(t,x)=-\sum_{i=1}^{\infty}A_i\omega_i\cos(k_i x)\sin(\omega_i t+\delta) \end{cases}$$

↑ cos となっているところに注意

$$u(0,x)=f(x), v(0,x)=g(x), \frac{\partial f}{\partial x}(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(L)=0$$

$$\begin{cases} f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\cos(k_i x) \\ g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_i\cos(k_i x), \quad k_i=\frac{i\pi}{L} \end{cases}$$

フーリエ展開して

$$\begin{cases} a_i=\frac{2}{L}\int_0^L dx\cos(k_i x)f(x) \\ b_i=\frac{2}{L}\int_0^L dx\cos(k_i x)g(x) \end{cases}$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L dx\cos(k_i x)\cos(k_j)x=\frac{1}{L}\int_0^L dx\left[\cos\left((k_i+k_j)x\right)+\cos\left((k_i-k_j)x\right)\right]=\delta_{ij}$$

$$\boxed{\frac{2}{L}\int_0^L dx\cos(k_i x)\cos(k_j x)=\delta_{ij}}$$

すなわち、$cos(k_i x)$ は直交関数形である。[7]

3.4 補足〜より一般的なフーリエ級数展開

区間 $-L\le x\le L$(区間を拡げたよ) で定義された関数 f(x) がこの区間で連続であるとき、

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cos(k_i x)+\sum_{i=1}^{\infty}b_i\sin(k_i x)$$

[7] sin で展開するとフーリエ正弦展開、cos で展開するとフーリエ余弦展開らしい。

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} dx \cos(k_i x) f(x) \quad i = 0, 1, \cdots, \infty \\ b_i = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} dx \sin(k_i x) f(x) \quad i = 1, 2, \cdots, \infty \end{cases}$$

と展開できる。

(説明)

cos の場合

$$\begin{aligned} &\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx \cos(k_i x)\cos(k_j x) \\ &\qquad = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx \frac{1}{2}\left[\cos((k_i + k_j)x) + \cos((k_i - k_j)x)\right] \\ &\qquad = \delta_{ij} \end{aligned}$$

sin の場合

$$\begin{aligned} &\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx \sin(k_i x)\sin(k_j x) \\ &\qquad = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx \frac{1}{2}\left[-\cos((k_i + k_j)x) + \cos((k_i - k_j)x)\right] \\ &\qquad = \delta_{ij} \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} dx \cos(k_i x)\sin(k_j x)$ はどうなるだろうか (cos と sin は直交するか)。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx \cos(k_i x)\sin(k_j x) \\ &\qquad = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx \frac{1}{2}\left[\sin((k_i + k_j)x) + \sin((k_j - k_i)x)\right] \\ &\qquad = \frac{1}{2L}\left[-\frac{1}{k_i + k_j}\cos((k_i + k_j)x) + \frac{1}{k_i - k_j}\cos((k_i - k_j)x)\right]_{-L}^{L} = 0 \end{aligned}$$

上の場合は、区間が $-L$ から L であるから成り立つもの。0 からだったらダメ。
これを用いれば最初の式を証明できる。

$$\int_{-L}^{L} dx f(x) = \int_{-L}^{L} dx \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(k_i x) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin(k_i x) \right)$$
$$= \frac{a_0}{2} 2L = a_0 L$$
$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx f(x) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx \cos(k_0 x) f(x), \quad k_0 = 0$$

また、$f(x)$ が偶関数のとき、

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow b_i = 0$$

となる。

$$b_i = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx \sin(k_i x) f(x)$$
$$= \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^{0} dx \sin(k_i x) f(x) + \int_{0}^{L} dx \sin(k_i x) f(x) \right]$$

$\displaystyle\int_{-L}^{0} dx \sin(k_i x) f(x)$ は、$y = -x$ とおいて、

$$= -\int_{-L}^{0} dy \sin(k_i y) f(-y)$$
$$= \int_{0}^{L} dy \sin(k_i y) f(y)$$

よって?、偶関数の場合には、cos だけで表すことができる。
奇関数の場合には、$a_i = 0$。[8]

半区間 $0 \leq x \leq L$ で定義された関数 $f(x)$ に対しては、正弦関数 $\sin(k_i x)$ と余弦関数 $\cos(k_i x)$ のどちらの展開も、数学的には可能である。
区間 $-L \leq x \leq L$ で定義された関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L \\ f(-x) & -L \leq x < 0 \end{cases}$$

で導入する (偶関数)。このとき、

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(k_i x)$$

[8] で、どうなる?

つまり、こういう $F(x)$ のとりかたをすれば、cos で展開することができたわけだ。一方 $F(x)$ を

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x\le L \\ -f(-x) & -L\le x<0 \end{cases}$$

とすると、(奇関数)

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i\sin(k_ix)$$

つまり、こういう $F(x)$ のとりかたをすれば、sin で展開することができたわけだ。

ex.)

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2a}{L}x & 0\le x\le \frac{L}{2} \\ \frac{2a}{L}(L-x) & \frac{L}{2}\le x\le L \end{cases}$$

のとき、

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}dxF(x)=\frac{2}{L}\int_0^L dxF(x)=\frac{2}{L}\int_0^L dxf(x)=\frac{2}{L}\frac{aL}{2}=a$$

$$\begin{aligned} a_i=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}dx\cos(k_ix)F(x) \\ &=\frac{2}{L}\int_0^L dx\cos(k_ix)f(x) \\ &=\begin{cases} \dfrac{8a}{L^2}\displaystyle\int_0^{\frac{L}{2}}dx\cos(k_ix)x & i:\text{偶数} \\ 0 & i:\text{奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

$i=2u$ のとき

$$a_{2u}=\frac{8a}{L^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)=\begin{cases} 0 & n:\text{偶数} \\ -\dfrac{4a}{(2m+1)^2\pi^2} & n:\text{奇数} \end{cases}$$

ちょっと展開してみよう。

$$f(x)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)+\frac{1}{9}\cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right)+\frac{1}{25}\cos\left(\frac{10\pi}{L}x\right)+\cdots+\right]$$

これは、

$$\frac{8a}{\pi^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)-\frac{1}{9}\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)+\frac{1}{25}\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right)-\cdots+\right]$$

と展開できる。これは、(この区間で!!) 全く同じである。[9]
< フーリエ級数の複素表示 >

$$\begin{cases} \cos(k_n x) = \frac{1}{2}\left[e^{ik_n x} + e^{-ik_n x}\right] \\ \sin(k_n x) = \frac{1}{2i}\left[e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}\right] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}(e^{ik_n x} + e^{-ik_n x}) - i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2}(e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{ib_n x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-ik_n x} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, k_{-n} = \frac{-n\pi}{L} \end{aligned}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n = 1, 2, \cdots, \infty \\ \frac{1}{2}a_0 & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib{-}n) & n = -1, -2, \cdots, -\infty \end{cases}$$

とすると、

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x}}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx e^{-ik_n x} f(x) \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-ik_n x} e^{ik_n x} \\ &= (m \neq n) \quad \frac{1}{2L}\frac{1}{i(k_m - k_n)}\left[e^{-i(k_m - k_n)x}\right]_{-L}^{L} = 0 = \delta_{mn}??? \end{aligned}$$

ちなみに、$c_n^* = c_{-n}$ らしい。

[9] $-L \leq x \leq L$ で定義された関数が

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x)$$

と展開できるとき、$x > L$ または $x < L$ の領域では、周期 $T = 2L$ の周期関数となる。

$$\because 2Lk_0 = 2L\frac{n\pi}{L} = n(2\pi)$$

より、展開式で $x \longrightarrow x + 2L$ としてみればわかる。
$*$ すると周期が 2L の周期関数なら、$-L \leq x \leq L$ の範囲で展開した結果を $-\infty < x < \infty$ で適用することができる。

4　一次元の波動

4.1　一次元の進行波

波動方程式:$u(t,x)$ を変位として

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t,x) = 0$$

これを因数分解すると、

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} \xi = x - vt \\ \eta = x + vt \end{cases}$　とおく。

ξ の任意の関数 $f(\xi)$ は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) f(\xi) &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + v \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \frac{df}{d\xi} \\ &= (-v + v) \frac{df}{d\xi} = 0 \end{aligned}$$

よって、$f(x-vt)$ は波動方程式の解である。これは $\boxed{\text{右向き進行波}}$ となっている。
同様に、$g(x+vt)$ も波動方程式の解である。これは $\boxed{\text{左向き進行波}}$ となっている。
この二つ[10]を使うと、任意の波を表すことができる。これを次に示す。
初期条件を、

$$\begin{cases} u(0,x) = f(x) + g(x) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = -vf'(x) + vg'(x) = v_0(x) \end{cases}$$

下の式より、

$$f'(x) - g'(x) = -\frac{1}{v} v_0(x)$$

x で積分すると、

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{v} \int_0^x dx v_0(x') + f(0) - g(0)$$

上の二式を足して $\times \frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{1}{2} u_0(x) - \frac{1}{2v} \int_0^x dx' v_0(x') + \frac{1}{2}(f(0) - g(0))$$

[10] f,g の形はそれぞれの場合によるけど。

上の二式の差に $\times\frac{1}{2}$

$$g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2v}\int_0^x dx' v_0(x') - \frac{1}{2}(f(0) - g(0))$$

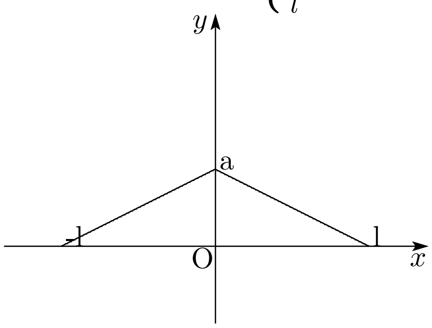
f,g が波動方程式の解であるから、二つの線形結合で

$$\boxed{\therefore u(t,x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-vt) + u_0(x+vt)\right] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} dx' v_0(x')}$$

これをダランベールの解 (公式) という。

ex.)

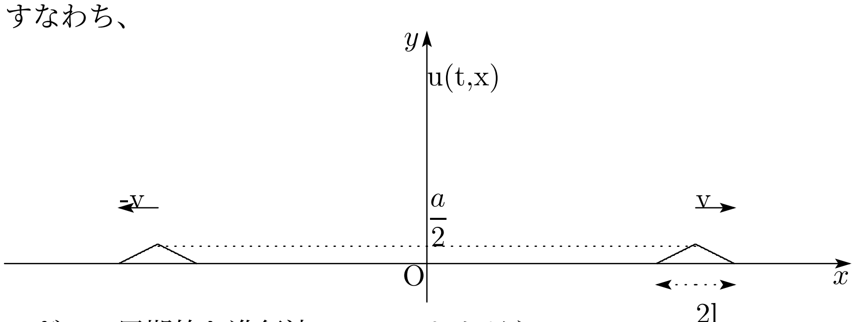
初期条件が $u_0(x) = \begin{cases} 0 & |x| > l \\ \frac{a}{l}(-|x| + l) & |x| \leq l \end{cases}$ のとき、$(v_0(t) = 0)$



解)

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x-vt) + u_0(x+vt))$$

すなわち、



つぎに、周期的な進行波についてかんがえる。

$$\begin{aligned} u(t,x) &= A\cos(k(x-vt) + \delta) \\ &= A\cos(kx - \omega t + \delta) \quad v = \frac{\omega}{k}: \text{位相速度} \end{aligned}$$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ が周期、この k が波数である。

4.2 波束

波動関数が局在化したものである。
右進行波 $f(\xi)=f(x-vt)$ を周期 $T=2L$ の周期関数であるとみなすと、

$$f(\xi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(k_n\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}k_n\sin(k_n\xi)$$

$$\begin{cases} f(\xi)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{ik_n\xi} \\ c_n=\dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L}dxf(x)e^{-ik_nx} \end{cases}$$

$k_n=\dfrac{n\pi}{L}=n\Delta k,\ \Delta k=\dfrac{\pi}{L}\longrightarrow 0\quad(L\longrightarrow\infty)$
$\tilde{f}(k_n)=\dfrac{2L}{\sqrt{2\pi}}c_n$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} f(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{ik_n\xi}&=\frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\sum\tilde{f}(k_n)e^{ik_n\xi} \\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum\tilde{f}(k_n)\frac{2\pi}{2L}e^{ik_n\xi} \end{aligned}$$

$\dfrac{2\pi}{2L}=\dfrac{\pi}{L}=\Delta k$ より、

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta k\tilde{f}(k_n)e^{ik_n\xi}$$

$L\longrightarrow\infty,\Delta k\longrightarrow 0$ の極限では、

$$\boxed{f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dk\tilde{f}(k)e^{ik\xi}(\text{フーリエ逆変換})}$$

$$\tilde{f}(k)=\lim_{L\longrightarrow\infty}\left(\frac{2L}{\sqrt{2\pi}}\right)=\lim_{L\longrightarrow\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L}dxf(x)e^{-ikx}$$

$$\boxed{\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dxf(x)e^{-ikx}}$$

これをフーリエ変換という。

< フーリエ変換の例 : パルス型進行波 >

$$f(x-vt)=\begin{cases} a & |x-vt|\le\Delta \\ 0 & |x-vt|>\Delta \end{cases}$$

のフーリエ変換を求めよ。解)

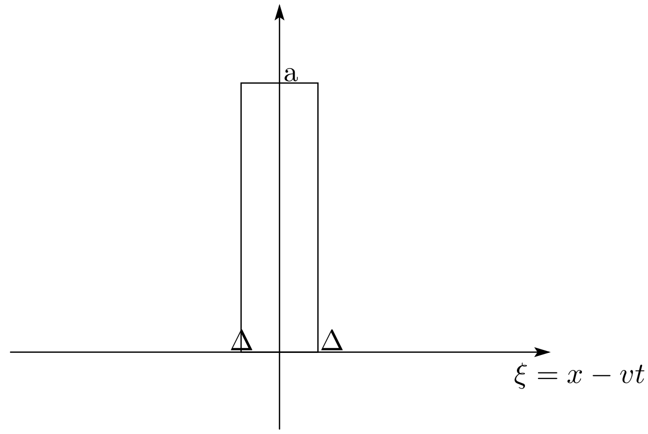


図 8: パルス型進行波

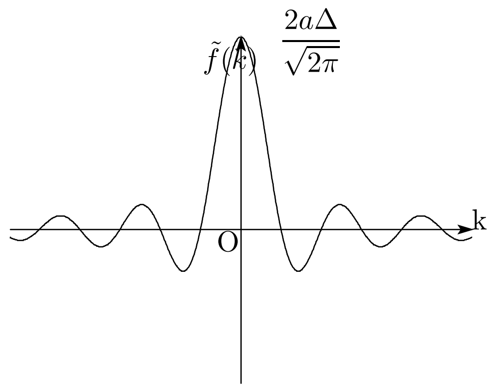


図 9: パルス型進行波のフーリエ変換

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-ik\xi} \\
&= \frac{a}{2\pi}\int_{-\Delta}^{\Delta} d\xi e^{-ik\xi} = \frac{a}{2\pi}\frac{1}{-ik}\left[e^{-ik\Delta} - e^{ik\Delta}\right] \\
&= \frac{2a\Delta}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k\Delta}\sin(k\Delta) \quad \because \frac{1}{2i}\left[e^{-ik\Delta} - e^{ik\Delta}\right] = \sin(k\Delta)
\end{aligned}
$$

グラフは図 9 のようになる。ちなみに、$\Delta \longrightarrow 0$,a$\longrightarrow \infty$ の極限をとると、図 11 のようなデルタ関数となる。ただし $20\Delta = 1$ としている。

$$
\begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1
$$

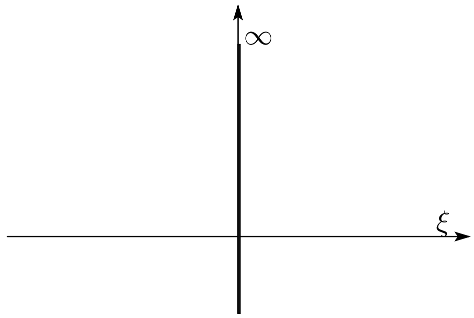


図 10: デルタ関数

という性質をもつ。偶関数なので $\delta(x) = \delta(-x)$。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x) = f(0)$$
$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x-y)f(y) = f(x)$$

特に最後の性質は重要らしい。
＜ デルタ関数のフーリエ変換 ＞

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x)e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad k\text{ に依存しないことに注意。}$$
$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dke^{ikx}$$

デルタ関数を使うと、フーリエ変換した関数にフーリエ逆変換をすると元に戻ることを証明できる。

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\tilde{f}(k)e^{ik\xi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi' f(\xi')e^{-ik\xi'}e^{ik\xi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi' f(\xi')\int_{-\infty}^{\infty} dke^{-ik(\xi-\xi')}
\end{aligned}$$

$\xi - \xi' = x$ であるから

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' f(\xi')\delta(\xi-\xi') = f(\xi) \quad \text{前に書いたデルタ関数の性質参照のこと。}$$

4.3 波の運ぶエネルギー

$\Delta m = \sigma\Delta x$ とすると、$v^2 = \dfrac{T}{\sigma}$ である[11]。

[11]導いてから使うこと。このとき、

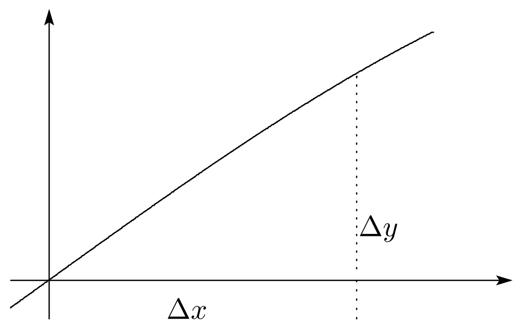


図 11: 弦の微小部分

運動エネルギー

$$
\begin{aligned}
\Delta K &= \frac{1}{2}\Delta m\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Delta x\sigma(-vf')^2 \quad f' = \frac{\partial u}{\partial x}
\end{aligned}
$$

この負号は、波動方程式の一般解が $u = A\sin(kx+\phi)\cos(\omega t+\delta)$ であることから、x,t での微分を考えると自明である。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\Delta x\sigma x^2(f')^2 \\
&= \frac{1}{2}\Delta x\sigma\cdot\frac{T}{\sigma}(f')^2 \\
&= \frac{1}{2}\Delta x T(f')^2
\end{aligned}
$$

ポテンシャルエネルギー

図 11 で、$\Delta y = \Delta\dfrac{\partial u}{\partial x} = \Delta x f'$。
このとき、弦ののびは

$$
\begin{aligned}
\Delta l &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} - \Delta x \\
&= \sqrt{(\Delta x)^2(1+f')^2} - \Delta x \\
&= \Delta x\sqrt{1+(f')^2} - \Delta x \\
&\approx \Delta x\left(1+\frac{1}{2}(f')^2\right) - \Delta x \\
&= \frac{1}{2}\Delta x(f')^2
\end{aligned}
$$

よって、仕事を考えて

$$
\begin{aligned}
\Delta W &= T\Delta l \\
&= \frac{1}{2}\Delta x T(f')^2
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \Delta U = \Delta W = \frac{1}{2}T(f')^2
$$

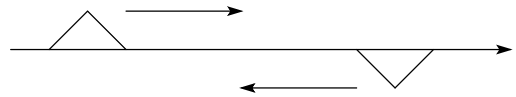


図 12: 波の打ち消し合いとエネルギーの行方

となり、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーが一致する。
また、振動の全エネルギーは

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \Delta x T(f')^2$$

$$\epsilon = \frac{\Delta E}{\Delta x} = T(f')^2$$

をエネルギー密度という。
次に、波の中のエネルギーの流れを考えよう。
< エネルギー流速密度 =energy flux>

$$\begin{aligned} J &= v\epsilon = vT(f')^2 \\ &= vT\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \frac{T}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \end{aligned}$$

$v = \sqrt{\dfrac{T}{\sigma}}$ より、

$$\frac{T}{v} = T\sqrt{\frac{\sigma}{T}} = \sqrt{T\sigma} = Z$$

である。この Z をインピーダンスという。

さて、このような両方向の波が打ち消し合うとき、エネルギーはどうなってしまうのだろう。

$$\begin{aligned} \Delta K = \frac{1}{2}\Delta x\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 &= \frac{1}{2}\Delta x\sigma(-vf' + vg')^2 \\ &= \frac{1}{2}\Delta\sigma v^2(-f' + g')^2 \end{aligned}$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\Delta xT\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}\Delta xT(f' + g')^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta E = \Delta K + \Delta U &= \frac{1}{2}\Delta xT\left[(-f' + g')^2 + (f' + g')^2\right] \\ &= \Delta xT\left[(f')^2 + (g')^2\right] \end{aligned}$$

エネルギー密度は、

$$\epsilon = \frac{\Delta E}{\Delta x} = T\left[(f')^2 + (g')^2\right]$$

となる。これは右向き進行波と左向き進行波のエネルギーの和である。つまり、ポテンシャルエネルギーは 0 になったが、上下の方向に動こうとする運動エネルギーが残っている (らしい)。

4.4 波の反射と透過

4.4.1 波の反射

今まで無視していたが、境界条件を確認しておく。

$$\begin{cases} \text{固定端} \quad u(t,0) = 0 \\ \text{自由端} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 \end{cases}$$

固定端

u_i を入射波、u_r を反射波とする。

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u_i(t,x) + u_r(t,x) \\ &= f(x-vt) + g(x+vt) \end{aligned}$$

$$\therefore f(-vt) + g(vt) = 0$$

すなわち、$g(x) = -f(-x)$ が必要である。

$$\therefore u(t,x) = f(x-vt) - f(-x-vt)$$

$\boxed{u_r(t,x) = -f(-x-vt)}$
これが反射波。

自由端

$$\begin{aligned} &f'(-vt) + g'(vt) = 0 \\ &f'(-x) + g'(x) = 0 \end{aligned}$$

積分すると、

$$\int_0^x dx' f'(-x') = -\int_0^{-x} (-dx') f'(-x') = -f(-x) + f(0) \quad \int_0^x dx' g'(-x') = g(x) + g(0)$$

$$\therefore g(x) = -f(x) + \text{const.}$$

定数部分は適当に無視すると、

$$g(x) = f(-x)$$

よって、

$$u_r(t,x) = g(x+vt) = f(-x-vt)$$

すなわち、$\boxed{u_r(t,x) = f(-x-vt)}$が反射波。

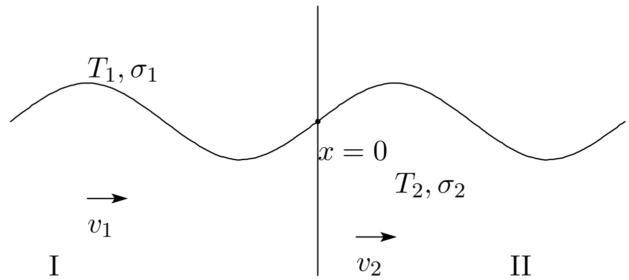


図 13: 波の透過

4.4.2 波の透過

図 13 のように、左右で材質の違う弦が繋がっているとき、($v_1 = \sqrt{\dfrac{T_1}{\sigma_1}}, v_2 = \sqrt{\dfrac{T_2}{\sigma_2}}$)
このとき、

$$u(t,x) = \begin{cases} u_I(t,x) & x < 0 \\ u_{II}(t,x) & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_I(t,x) = u_i(t,x) + u_r(t,x) \\ u_{II}(t,x) = u_t(t,x) \end{cases}$$

u_t は透過波 (transmitted wave)。

$$\begin{cases} u_i(t,x) = f_I(x - v_1 t) \\ u_r(t,x) = g_I(x + v_1 t) \\ u_t(t,x) = f_{II}(x - v_2 t) \end{cases}$$

境界条件は

$$\begin{cases} u_I(t,0) = u_{II}(t,0) & (\text{連続性より}) \\ T_1 \dfrac{\partial u_I}{\partial x}(t,0) = T_2 \dfrac{\partial u_{II}}{\partial x}(t,0) & (\text{横方向の力のつり合い条件より}) \end{cases}$$

よって、

$$f_I(-v_1 t) + g_I(v_1)t = f_{II}(-v_2)t \tag{5}$$
$$T_1(f_I'(-v_1 t) + g_I'(v_1 t)) = T_2 f_{II}'(-v_2 t) \tag{6}$$

(6) を積分して、

$$\int_0^t dt' f_I'(-v_1 t') = -\frac{1}{v_1}\int_0^{-v_1 t} d(-v_1 t') f_I'(-v_1 t) = -\frac{1}{v_1}(f_I(-v_1 t) - f_I(0))$$

$$\begin{aligned}(6) \Rightarrow T_1 \left(-\frac{1}{v_1} f_I(-v_1 t) + \frac{1}{v_1} g_I(v_1 t) \right) \\ = T_2 \left(-\frac{1}{v_2} f_{II}(-v_2 t) \right) + \text{const.}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{T_1}{v_1}(f_I(-v_1t) - g_I(v_1t)) = \frac{T_2}{v_2}f_{II}(-v_2t) \tag{7}$$

ここで、

$$\frac{T_1}{v_1} = \frac{T_1}{\sqrt{\frac{T_1}{\sigma_1}}} = \sqrt{T_1\sigma_1} = z_1 : \text{インピーダンス}$$

同様に

$$\frac{T_2}{v_2} = z_2$$

(7) より

$$f_I(-v_1t) - g_I(v_1t) = \frac{z_2}{z_1}f_{II}(-v_2)t \tag{8}$$

さて、(5)+(8) より

$$2f_I(-v_1t) = \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right)f_{II}(-v_2t)$$
$$\Leftrightarrow f_{II}(-v_2t) = \frac{2z_1}{z_1+z_2}f_I(-v_1t)$$

(5)-(8) より、

$$2g_I(v_1t) = \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)f_{II}(-v_2t) = \frac{z_1-z_2}{z_1}f_{II}(-v_1t)$$
$$= \frac{2(z_1-z_2)}{z_1+z_2}f_I(-v_1t)$$

$$\therefore g_I(v,t) = \frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}f_I(-v_1t) \Rightarrow g_I(t) = \frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}f_I(x)$$

$x \to x + v_1t$ とおいて、

$$\boxed{g_I(x+v_1t) = \frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}f_I(-x-v_1t)}$$

さて、

$$f_{II}(-v_2t) = \frac{2z_1}{z_1+z_2}f_I(-v_1t')$$

$-v_2t' = x - v_2t \Leftrightarrow t' = t - \frac{1}{v_2}x$ より

$$f_{II}(x-v_2t) = \frac{2z_1}{z_1+z_2}f_I\left(-v_1\left(t - \frac{x}{v_2}\right)\right)$$
$$= \frac{2z_1}{z_1+z_2}f_I\left(\frac{v_1}{v_2}(x-v_2t)\right)$$

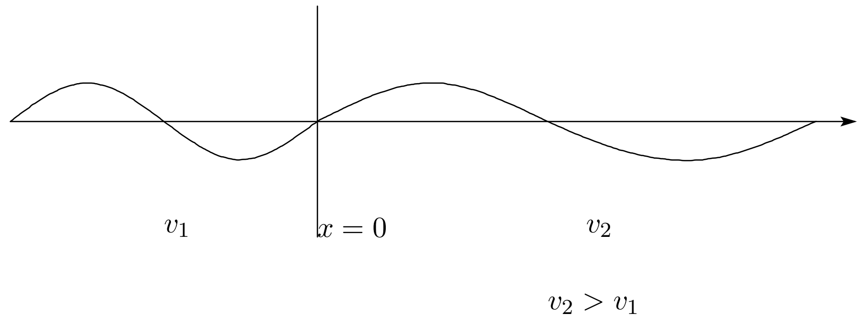


図 14: 例:波の透過

ここで、$\dfrac{v_1}{v_2}$ はスケール変換を表しているらしい。

まとめて、

$$\begin{cases} \text{反射波}: \quad g_I(x + v_1 t) = \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} f_I(x - v_1 t) \\ \text{透過波}: \quad f_{II}(x - v_2 t) = \dfrac{2z_1}{z_1 + z_2} f_I\left(\dfrac{v_1}{v_2}(x - v_2 t)\right) = \dfrac{2z_1}{z_1 + z_2} f_I\left(\dfrac{v_1}{v_2} x - v_1 t\right) \end{cases}$$

ちなみに $z_1 = z_2$ のとき反射がなくなり、透過波にエネルギーが全て伝えられる。
このようにインピーダンスを合わせることをインピーダンス整合という。

例)
入射波が

$$\begin{aligned} f_I(x - v_1 t) &= a\cos(k_1(x - v_1 t)) \\ &= a\cos(k_1 x - \omega_1 t) \end{aligned}$$

のとき、

$$g_I(x + v_1 t) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} a\cos(k_1 x + \omega_1 t)$$

$$f_{II}(x - v_2 t) = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} a\cos\left(k_1 \frac{v_1}{v_2} - \omega_1 t\right) = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} a\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

このとき、スケール変換によって

$$k_2 = k_1 \frac{v_1}{v_2} (\text{波数が変化する}), \quad \omega_2 = \omega_1$$

つまり、図 14 のように波が伸びる。

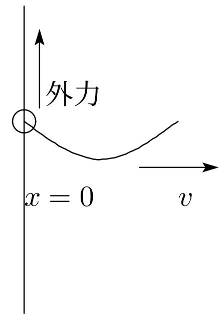


図 15: 境界での励起

4.5 波の励起

図 15 のように端を外力によって動かす。

$$u(t,0)=h(t)$$

が境界条件。$f(-vt)=h(t) \Leftrightarrow f(x)=h\left(-\frac{1}{v}\right)t$ から、

$$u(t,x)=f(x-vt)=h\left(-\frac{1}{v}(x-vt)\right)=h\left(-\frac{1}{v}+t\right)$$

例)

$$h(t)=a\cos(\omega t)$$

とすると、

$$\begin{aligned} f(x-vt) &= a\cos\left(\omega\left(t-\frac{1}{v}x\right)\right) \\ &= a\cos\left(\frac{\omega}{v}x-\omega\right)=a\cos(kt-\omega t) \end{aligned}$$

これは $k=\frac{\omega}{v}$ より。この関係 ($\omega=vk$) を 分散関係 という。次は、この関係 (先述してある) が成り立たないときについて考える。

4.6 波の分散

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\omega_0^2\right)u(t,x)=0$$

これはプラズマ振動や振り子を横につないだときの連続極限 ($\omega_0^2=\frac{g}{l}$) などで必要になるらしい。こういうものを計算するためには、$u(t,x)=a\cos(kx-\omega t)$ に代入して、

$$-\omega^2+v^2k^2\omega_0^2)u(t,x)=0 \quad \omega^2=\omega_0^2+v^2k^2,\ \omega=\sqrt{\omega_0^2+v^2k^2}$$

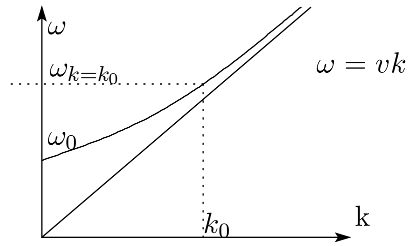


図 16: 分散関係

このとき、図 16 のようになっている。

$$v_k = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + v^2 k^2}}{k}$$

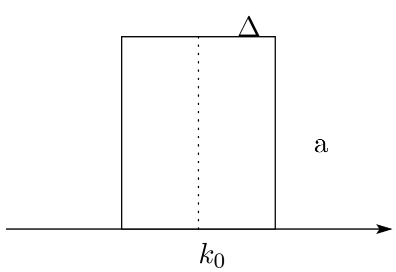
これを位相速度という。これは k に依存する。
波束について?(ここよく分からない)
フーリエ分解して

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ik(x - v_k t)}$$

ただし $\omega_k = \sqrt{\omega_0^2 + v^2 k^2}$

例)

$$\tilde{f}(k) = \begin{cases} a & |k - k_0| < \Delta \\ 0 & |k - k_0| > \Delta \end{cases}$$



$$\omega_k = \omega_{k=k_0} (= \omega_0 = \omega(k_0)) + \frac{d\omega}{dk}(k - k_0) + \cdots \quad \text{(テイラー展開)}$$

より、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{i(kx - \omega_k t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\Delta} dk' a e^{i(k_0 x + k' - \omega_0 t - \frac{d\omega}{dk} k' t)} \\ &= e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\Delta} e^{ik'(x - \frac{d\omega}{dk} t)} \\ &= e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x - v_g t} \sin(\Delta(x - v_g t)) \end{aligned}$$

ここで、$v_g = \dfrac{d\omega_k}{dk} = \dfrac{v^2 k}{\sqrt{\omega_0^2 + v^2 k^2}}$ を群速度といい (波束全体の速度)、$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + v^2 k^2}$。

5　二次元・三次元の波

5.1　さまざまな波

$$\begin{cases} \text{音波 (3 次元)} & \text{圧縮性流体を伝わる波 (圧縮率による)} \\ \text{水面波 (2 次元)} & \text{圧縮性流体の表面波 (重力・表面張力による)} \\ \text{電磁波 (3 次元)} & \text{真空中を伝わる電場・磁場の波 (Maxwell の方程式に従う)} \\ \text{物質波 (3 次元)} & \text{量子力学の確率振幅の波 (Schrödinger 方程式で記述できる)} \end{cases}$$

5.1.1　音波の式

密度を $\rho(x, y, z, t)$ とすると、(証明はしないが)

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho = 0$$

多次元の波動方程式である。これは媒質が等方的 (isotropic) である場合。

$$v^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S/N} = \frac{1}{K\rho_0} \quad \kappa = \frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S/N}$$

S はエントロピー、N は分子数。断熱的な場合を考えているらしい。

5.2　平面波 (3 次元中の 1 次元の波)

$$P(x, y, z, t) = f(x, t)$$

すなわち、y,z 方向に対しては一次元の波を考える。
このとき、先ほどの音波の式から

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \text{一次元の波の方程式}$$

となって我々はこれを解くことができる。
進行方向を $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $\vec{n^2} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ とすると、

$$s = b\vec{n} \cdot \vec{r} = n_x x + n_y y + n_Z z,\ \vec{r} = (x, y, z)$$

$$\rho(x, y, z, t) = f(s, t)$$

とおく。

$$\nabla f(s,t) = \nabla s \cdot \frac{\partial f}{\partial s} = \vec{n}\frac{\partial f}{\partial s} \quad \because \nabla s = \vec{n}$$

$$\triangle f(s,t) = \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \vec{n} \cdot (\nabla \vec{s})\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \vec{n}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial t^2}f - v^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}f = 0$$

$$\rho(x,y,z,t) = a\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi)\,\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k},\ s = \frac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{k}$$

5.3 球面波

$$\rho(x,y,z,t) = g(r,t) \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\nabla g(r,t) = (\nabla r)\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial g}{\partial r} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\nabla^2 g = \nabla\left(\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial g}{\partial r}\right) = +\frac{\vec{r}}{r}\nabla r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$$

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) &= \left(\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right)\vec{r} + \frac{1}{r}(\nabla\vec{r}) \\ &= -\frac{1}{r^2}(\nabla r)\cdot\vec{r} + \frac{1}{r}\cdot 3 \quad \therefore \nabla\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 3 \\ &= -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r} + \frac{3}{r} \\ &= -\frac{1}{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}\end{aligned}$$

$$\nabla g^2 = \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$$

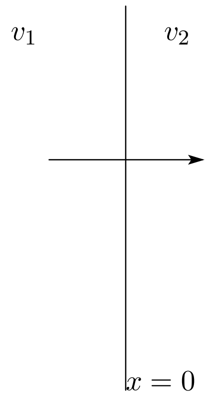
$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - v^2\left(\frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\right) = 0$$

$g(r,t) = \frac{1}{r}f(r,t)$ とおく。

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)f + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}f = -\frac{1}{r^2}f + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r^2}f + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{2}{r^3}f - \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial f} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \frac{2}{r}\left(-\frac{1}{r^2}f + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{2}{r^3}f - \frac{2}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\end{aligned}$$



p は等しい。
図 17: 平面波の反射・透過

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) = 0$$

f は一次元の波動方程式に従う。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0$$

$f(r,t) = h(r, vt)$　外向きの球面波

例)

$$\rho(x,y,z,t) = \frac{a}{r} \cos(kr - \omega t)$$

$* \rho(x,y,z,t) = g(r,t) = \dfrac{1}{r} f(x,t)$ と表されるスカラー場

5.4　平面波の反射と透過

$$\rho(x,y,z,t) = f(x,y,t) = a \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \quad \vec{k} = (k_x, k_y, 0) \quad (\rho は z に依存しない)$$

とすると、
境界条件は (波の連続性から)

$$\rho_i e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} + \rho_r e^{i(k'_x x + k'_y y + k'_z z - \omega' t)} = \rho_t e^{i(k''_x x + k''_y y + k''_z z - \omega'' t)}$$

$x = 0$ の面上で連続性が全ての (y,z,t) に対して成り立つための条件は、

$$k_y = k'_y = k''_y,\ 0 = k'_y = k''_y,\ \omega = \omega' = \omega''$$

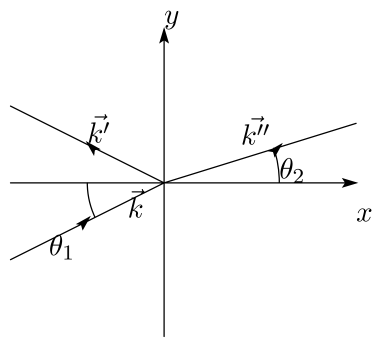


図 18: 屈折

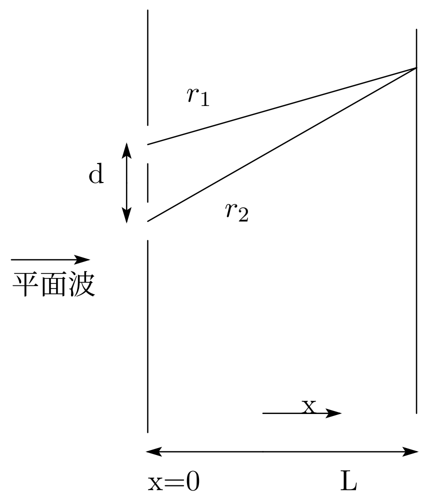


図 19: 球面波の干渉

$$k_y = k \sin\theta_1$$
$$k''_y = k'' \sin\theta_2$$

$$\therefore k \sin\theta_1 = k'' \sin\theta_2$$

また、

$$\omega = v_1 k,\ \omega'' = v_2 k'' = v_1 k$$

であるから、

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{k''}{k} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

これを snell の法則という。

5.5 球面波の干渉

$$
\begin{aligned}
&a\frac{1}{r_1}\cos(kr_1 - \omega t) + a\frac{1}{r_2}\cos(kr_2 - \omega t) \\
&\approx a\frac{2}{L}\cos\left(\frac{k(r_1+r_2)}{2} - \omega t\right) \times \cos\left(\frac{k}{2}(r_1 - r_2)\right)
\end{aligned}
$$