数学及力学演習 L 第 1 回（10/15） 解答

問題 1

(1) 両辺を微分して

$$
\begin{aligned}
&y(x) = 2y(x) + 2xy'(x) \\
\Leftrightarrow\ &y'(x) = -\frac{y(x)}{2x}
\end{aligned}
$$

(2) 変数分離法。

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{y(x)}{2x} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{dy(x)}{y(x)} = -\frac{dx}{2x} \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{dy(x)}{y(x)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \\
\Leftrightarrow\ &\log|y| = -\frac{1}{2}\log|x| + C' \\
\Leftrightarrow\ &y = \frac{C}{\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

(3) (1) の積分方程式に (2) の結果を代入すると

$$
\begin{aligned}
\int_0^x y(x)\ dx &= \int_0^x \frac{C}{\sqrt{x}} dx \\
&= \left[2C\sqrt{x}\right]_0^x \\
&= 2C\sqrt{x} \\
&= 2x \cdot \frac{C}{\sqrt{x}} \\
&= 2xy
\end{aligned}
$$

問題 2

(a) $y' = a\dfrac{x}{y}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = a\frac{x}{y} \\
\Leftrightarrow\ &y\,dy = ax\,dx \\
\Leftrightarrow\ &\int y\,dx = a\int x\,dx \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}y^2 = \frac{a}{2}x^2 + C' \\
\Leftrightarrow\ &y = \pm\sqrt{ax^2 + C}
\end{aligned}
$$

(b) $y' = axy$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = axy \\
\Leftrightarrow\ &\frac{dy}{y} = ax\,dx \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{dy}{y} = a\int x\,dx \\
\Leftrightarrow\ &\log|y| = \frac{a}{2}x^2 + C' \\
\Leftrightarrow\ &y = Ce^{\frac{a}{2}x^2}
\end{aligned}
$$

(c) $y' = 1 - y^2$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = (1+y)(1-y) \\
\Leftrightarrow\ &\frac{dy}{(1+y)(1-y)} = dx \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{dy}{(1+y)(1-y)} = \int dx \\
\Leftrightarrow\ &\int \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = 2\int dx \\
\Leftrightarrow\ &\log|1+y| - \log|1-y| = 2x + C' \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1+y}{1-y} = Ce^{2x} \\
\Leftrightarrow\ &y = \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}
\end{aligned}
$$

問題 3

(1) $\dfrac{dy(t)}{dt} = k\{\alpha - y(t)\}\{\beta - y(t)\}$

(2) ○ $\alpha = \beta$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} = k(\alpha - y)^2 \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{dy}{(\alpha - y)^2} = k\int dt \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{\alpha - y} = kt + C \\
\Leftrightarrow\ &y(t) = \alpha - \frac{1}{kt + C}
\end{aligned}
$$

○ $\alpha \neq \beta$ のとき

$$\frac{dy}{dt} = k(\alpha - y)(\beta - y)$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{(\alpha - y)(\beta - y)} = k\int dt$$
$$\Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{\alpha - y} - \frac{1}{\beta - y}\right) dy = (\beta - \alpha) k \int dt$$
$$\Leftrightarrow \log|\beta - y| - \log|\alpha - y| = (\beta - \alpha) kt + C'$$
$$\Leftrightarrow \frac{\beta - y}{\alpha - y} = Ce^{(\beta-\alpha)kt}$$
$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{C\alpha e^{(\beta-\alpha)kt} - \beta}{Ce^{(\beta-\alpha)kt} - 1}$$

問題 4

$u = \dfrac{y}{x}$（u は x の関数）とおく。
$y = ux$ の両辺を x で微分すると $y' = u'x + u$
これを用いて微分方程式を変形する。

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$
$$\Leftrightarrow y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$
$$\Leftrightarrow u'x + u = \frac{1+u}{1-u}$$
$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{1-u}\frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{1-u}{1+u^2}\,du = \int \frac{dx}{x}$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{1+u^2}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{1+u^2}\,du = \int \frac{dx}{x}$$
$$\Leftrightarrow \arctan u - \frac{1}{2}\log\left|1+u^2\right| = \log|x| + C' \quad (*)$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする

変数変換を考えると、$u = \dfrac{y}{x} = \tan\theta$ で

$(*)$ の式

$$\Leftrightarrow \theta - \frac{1}{2}\log\left|1+\tan^2\theta\right| = \log|r\cos\theta| + C'$$
$$\Leftrightarrow \theta + \log|\cos\theta| = \log r + \log|\cos\theta| + C'$$
$$\Leftrightarrow \log r = \theta - C'$$
$$\Leftrightarrow r = Ce^{\theta}$$

この方程式は渦巻き曲線群を表す。

問題 5

(a) $y' + k\sqrt{y} = 0 \quad (k > 0)$

$$\frac{dy}{dx} = -k\sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}}\,dy = -k\int dx$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{y} = -kx + C$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(C - kx)^2$$

(b) $y' = 1 + y^2$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$
$$\Leftrightarrow \arctan y = x + C$$
$$\Leftrightarrow y = \tan(x + C)$$

(c) $(-2x - 2y + 1)y' + (6x - 2y - 3) = 0$

$$y' = \frac{6x - 2y - 3}{2x + 2y - 1}$$
$$\Leftrightarrow y' = \frac{3 - \frac{2y}{2x-1}}{1 + \frac{2y}{2x-1}}$$

$u = \dfrac{2y}{2x-1}$（u は x の関数）とおく。

$y = \dfrac{1}{2}(2x-1)u$ の両辺を x で微分すると

$y' = u + \dfrac{1}{2}(2x-1)u'$

これを用いて微分方程式を変形する。

$$y' = \frac{3 - \frac{2y}{2x-1}}{1 + \frac{2y}{2x-1}}$$
$$\Leftrightarrow u + \frac{1}{2}(2x-1)u' = \frac{3-u}{1+u}$$
$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(u-1)(u+3)}{u+1}\frac{-2}{2x-1}$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{u+1}{(u-1)(u+3)}\,du = -2\int \frac{dx}{2x-1}$$
$$\Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+3}\right) du = -4\int \frac{dx}{2x-1}$$
$$\Leftrightarrow \log|(u-1)(u+3)| = -2\log|2x-1| + C'$$
$$\Leftrightarrow u^2 + 2u - 3 - \frac{C}{(2x-1)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow u = -1 \pm \sqrt{4 + \frac{C}{(2x-1)^2}}$$

$y = \frac{1}{2}(2x-1)\,u$ であったから、

$$y = \frac{1}{2}(2x-1)\left\{-1 \pm \sqrt{4 + \frac{C}{(2x-1)^2}}\right\}$$

(d) $y' = \dfrac{y^2}{x^2 + xy}$

$u = \dfrac{y}{x}$（u は x の関数）とおく。
$y = ux$ の両辺を x で微分すると $y' = u'x + u$
これを用いて微分方程式を変形する。

$$\begin{aligned}
& y' = \frac{y^2}{x^2+xy} \\
\Leftrightarrow\ & y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}} \\
\Leftrightarrow\ & u'x + u = \frac{u^2}{1+u} \\
\Leftrightarrow\ & u' = -\frac{u}{1+u}\frac{1}{x} \\
\Leftrightarrow\ & \int \left(1 + \frac{1}{u}\right) du = -\int \frac{dx}{x} \\
\Leftrightarrow\ & u + \log|u| = -\log|x| + C' \\
\Leftrightarrow\ & ue^u = \frac{C}{x}
\end{aligned}$$

$u = \dfrac{y}{x}$ であったから、

$$\begin{aligned}
& \frac{y}{x}\cdot e^{\frac{y}{x}} = \frac{C}{x} \\
\Leftrightarrow\ & ye^{\frac{y}{x}} = C
\end{aligned}$$

問題 6

(a) $z = t - x$ とすると、

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^x \{f(t-x)\}^3\, dx \\
=\ & \int_t^0 e^t e^{-z}\{f(z)\}^3 (-dz) \\
=\ & e^t \int_0^t e^{-z}\{f(z)\}^3\, dz \quad (*)
\end{aligned}$$

与えられた方程式の両辺を t で微分すると、

上記 $(*)$ から

$$\begin{aligned}
& \frac{df}{dt} + e^t \int_0^t e^{-z}\{f(z)\}^3\, dz + \\
& e^t \cdot e^{-t} \cdot \{f(t)\}^3 = ae^t \\
\Leftrightarrow\ & \frac{df}{dt} = ae^t - e^t \int_0^t e^{-z}\{f(z)\}^3\, dz - \{f(t)\}^3 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{df}{dt} = ae^t - \int_0^t e^x \{f(t-x)\}^3\, dx - \{f(t)\}^3 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{df}{dt} = f(t) - \{f(t)\}^3
\end{aligned}$$

(b) $\dfrac{df}{dt} = f - f^3$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{df}{f - f^3} = \int dt \\
\Leftrightarrow\ & \int \frac{df}{f(1+f)(1-f)} = \int dt \\
\Leftrightarrow\ & \int \frac{1}{f}\left(\frac{1}{1+f} + \frac{1}{1-f}\right) df = 2\int dt \\
\Leftrightarrow\ & \int \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{1+f}\right) df + \int \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{1-f}\right) df = 2\int dt \\
\Leftrightarrow\ & \log\left|\frac{f}{1+f}\right| + \log\left|\frac{f}{1-f}\right| = 2t + C' \\
\Leftrightarrow\ & \frac{f^2}{1-f^2} = Ce^{2t} \\
\Leftrightarrow\ & f(t) = \pm\sqrt{\frac{Ce^{2t}}{1+Ce^{2t}}}
\end{aligned}$$

積分方程式に $t = 0$ を代入すると $f(0) = a$

よって $C = \dfrac{a^2}{1-a^2}$ で

$$\begin{aligned}
& f(t) = \pm\sqrt{\frac{Ce^{2t}}{1+Ce^{2t}}} \\
\Leftrightarrow\ & f(t) = \pm\sqrt{\frac{a^2e^{2t}}{1-a^2+a^2e^{2t}}}
\end{aligned}$$

(c) $f(t) = \pm\sqrt{\dfrac{a^2}{\frac{1-a^2}{e^{2t}} + a^2}}$ より

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \pm 1$$

※ただし $a = 0$ のときは 0