数学及力学演習 L 第 1 回 (10/15) 解答

問題 1

(1) 両辺を微分して

$$\begin{aligned} & y(x) = 2y(x) + 2xy'(x) \\ \Leftrightarrow\ & y'(x) = -\frac{y(x)}{2x} \end{aligned}$$

(2) 変数分離法。

$$\begin{aligned} & \frac{dy(x)}{dx} = -\frac{y(x)}{2x} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{dy(x)}{y(x)} = -\frac{dx}{2x} \\ \Leftrightarrow\ & \int \frac{dy(x)}{y(x)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \log|y| = -\frac{1}{2}\log|x| + C' \\ \Leftrightarrow\ & y = \frac{C}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(3) (1) の積分方程式に (2) の結果を代入すると

$$\begin{aligned} \int_0^x y(x)\,dx &= \int_0^x \frac{C}{\sqrt{x}}dx \\ &= \left[2C\sqrt{x}\right]_0^x \\ &= 2C\sqrt{x} \\ &= 2x\cdot\frac{C}{\sqrt{x}} \\ &= 2xy \end{aligned}$$

問題 2

(a) $y' = a\dfrac{x}{y}$

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = a\frac{x}{y} \\ \Leftrightarrow\ & y\,dy = ax\,dx \\ \Leftrightarrow\ & \int y\,dx = a\int x\,dx \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}y^2 = \frac{a}{2}x^2 + C' \\ \Leftrightarrow\ & y = \pm\sqrt{ax^2 + C} \end{aligned}$$

(b) $y' = axy$

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = axy \\ \Leftrightarrow\ & \frac{dy}{y} = ax\,dx \\ \Leftrightarrow\ & \int \frac{dy}{y} = a\int x\,dx \\ \Leftrightarrow\ & \log|y| = \frac{a}{2}x^2 + C' \\ \Leftrightarrow\ & y = Ce^{\frac{a}{2}x^2} \end{aligned}$$

(c) $y' = 1 - y^2$

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = (1+y)(1-y) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{dy}{(1+y)(1-y)} = dx \\ \Leftrightarrow\ & \int \frac{dy}{(1+y)(1-y)} = \int dx \\ \Leftrightarrow\ & \int \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right)dy = 2\int dx \\ \Leftrightarrow\ & \log|1+y| - \log|1-y| = 2x + C' \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1+y}{1-y} = Ce^{2x} \\ \Leftrightarrow\ & y = \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1} \end{aligned}$$

問題 3

(1) $\dfrac{dy(t)}{dt} = k\{\alpha - y(t)\}\{\beta - y(t)\}$

(2) ○ $\alpha = \beta$ のとき

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dt} = k(\alpha - y)^2 \\ \Leftrightarrow\ & \int \frac{dy}{(\alpha - y)^2} = k\int dt \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\alpha - y} = kt + C \\ \Leftrightarrow\ & y(t) = \alpha - \frac{1}{kt + C} \end{aligned}$$

○ $\alpha \neq \beta$ のとき

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} = k(\alpha - y)(\beta - y) \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{dy}{(\alpha - y)(\beta - y)} = k\int dt \\
\Leftrightarrow\ &\int \left(\frac{1}{\alpha - y} - \frac{1}{\beta - y}\right) dy = (\beta - \alpha)k\int dt \\
\Leftrightarrow\ &\log|\beta - y| - \log|\alpha - y| = (\beta - \alpha)kt + C' \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\beta - y}{\alpha - y} = Ce^{(\beta-\alpha)kt} \\
\Leftrightarrow\ &y(t) = \frac{C\alpha e^{(\beta-\alpha)kt} - \beta}{Ce^{(\beta-\alpha)kt} - 1}
\end{aligned}$$

問題 4

$u = \dfrac{y}{x}$（u は x の関数）とおく。

$y = ux$ の両辺を x で微分すると $y' = u'x + u$

これを用いて微分方程式を変形する。

$$\begin{aligned}
&y' = \frac{x + y}{x - y} \\
\Leftrightarrow\ &y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} \\
\Leftrightarrow\ &u'x + u = \frac{1 + u}{1 - u} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{1 - u}\frac{1}{x} \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{1 - u}{1 + u^2}\, du = \int \frac{dx}{x} \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{1}{1 + u^2}\, du - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{1 + u^2}\, du = \int \frac{dx}{x} \\
\Leftrightarrow\ &\arctan u - \frac{1}{2}\log\left|1 + u^2\right| = \log|x| + C' \quad (*)
\end{aligned}$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする

変数変換を考えると、$u = \dfrac{y}{x} = \tan\theta$ で

$(*)$ の式

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \theta - \frac{1}{2}\log\left|1 + \tan^2\theta\right| = \log|r\cos\theta| + C' \\
&\Leftrightarrow \theta + \log|\cos\theta| = \log r + \log|\cos\theta| + C' \\
&\Leftrightarrow \log r = \theta - C' \\
&\Leftrightarrow r = Ce^{\theta}
\end{aligned}$$

この方程式は渦巻き曲線群を表す。

問題 5

(a) $y' + k\sqrt{y} = 0 \quad (k > 0)$

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = -k\sqrt{y} \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{dy}{\sqrt{y}}\, dy = -k\int dx \\
\Leftrightarrow\ &2\sqrt{y} = -kx + C \\
\Leftrightarrow\ &y = \frac{1}{4}(C - kx)^2
\end{aligned}$$

(b) $y' = 1 + y^2$

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx \\
\Leftrightarrow\ &\arctan y = x + C \\
\Leftrightarrow\ &y = \tan(x + C)
\end{aligned}$$

(c) $(-2x - 2y + 1)y' + (6x - 2y - 3) = 0$

$$\begin{aligned}
&y' = \frac{6x - 2y - 3}{2x + 2y - 1} \\
\Leftrightarrow\ &y' = \frac{3 - \frac{2y}{2x-1}}{1 + \frac{2y}{2x-1}}
\end{aligned}$$

$u = \dfrac{2y}{2x - 1}$（u は x の関数）とおく。

$y = \dfrac{1}{2}(2x - 1)u$ の両辺を x で微分すると

$y' = u + \dfrac{1}{2}(2x - 1)u'$

これを用いて微分方程式を変形する。

$$\begin{aligned}
&y' = \frac{3 - \frac{2y}{2x-1}}{1 + \frac{2y}{2x-1}} \\
\Leftrightarrow\ &u + \frac{1}{2}(2x - 1)u' = \frac{3 - u}{1 + u} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{du}{dx} = \frac{(u - 1)(u + 3)}{u + 1}\frac{-2}{2x - 1} \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{u + 1}{(u - 1)(u + 3)}\, du = -2\int \frac{dx}{2x - 1} \\
\Leftrightarrow\ &\int \left(\frac{1}{u - 1} + \frac{1}{u + 3}\right) du = -4\int \frac{dx}{2x - 1} \\
\Leftrightarrow\ &\log|(u - 1)(u + 3)| = -2\log|2x - 1| + C' \\
\Leftrightarrow\ &u^2 + 2u - 3 - \frac{C}{(2x - 1)^2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ &u = -1 \pm \sqrt{4 + \frac{C}{(2x - 1)^2}}
\end{aligned}$$

$y = \dfrac{1}{2}(2x-1)\,u$ であったから、

$$y = \frac{1}{2}(2x-1)\left\{-1 \pm \sqrt{4 + \frac{C}{(2x-1)^2}}\right\}$$

(d) $y' = \dfrac{y^2}{x^2+xy}$

$u = \dfrac{y}{x}$(u は x の関数) とおく。
$y = ux$ の両辺を x で微分すると $y' = u'x + u$
これを用いて微分方程式を変形する。

$$\begin{aligned}
& y' = \frac{y^2}{x^2+xy} \\
\Leftrightarrow\ & y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}} \\
\Leftrightarrow\ & u'x + u = \frac{u^2}{1+u} \\
\Leftrightarrow\ & u' = -\frac{u}{1+u}\frac{1}{x} \\
\Leftrightarrow\ & \int\left(1+\frac{1}{u}\right)du = -\int\frac{dx}{x} \\
\Leftrightarrow\ & u + \log|u| = -\log|x| + C' \\
\Leftrightarrow\ & ue^u = \frac{C}{x}
\end{aligned}$$

$u = \dfrac{y}{x}$ であったから、

$$\begin{aligned}
& \frac{y}{x}\cdot e^{\frac{y}{x}} = \frac{C}{x} \\
\Leftrightarrow\ & ye^{\frac{y}{x}} = C
\end{aligned}$$

問題 6

(a) $z = t - x$ とすると、

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^x \left\{f(t-x)\right\}^3 dx \\
=\ & \int_t^0 e^t e^{-z}\left\{f(z)\right\}^3 (-dz) \\
=\ & e^t \int_0^t e^{-z}\left\{f(z)\right\}^3 dz \quad (*)
\end{aligned}$$

与えられた方程式の両辺を t で微分すると、

上記 $(*)$ から

$$\begin{aligned}
& \frac{df}{dt} + e^t\int_0^t e^{-z}\left\{f(z)\right\}^3 dz + \\
& e^t\cdot e^{-t}\cdot\left\{f(t)\right\}^3 = ae^t \\
\Leftrightarrow\ & \frac{df}{dt} = ae^t - e^t\int_0^t e^{-z}\left\{f(z)\right\}^3 dz - \left\{f(t)\right\}^3 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{df}{dt} = ae^t - \int_0^t e^{x}\left\{f(t-x)\right\}^3 dx - \left\{f(t)\right\}^3 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{df}{dt} = f(t) - \left\{f(t)\right\}^3
\end{aligned}$$

(b) $\dfrac{df}{dt} = f - f^3$

$$\begin{aligned}
& \int\frac{df}{f-f^3} = \int dt \\
\Leftrightarrow\ & \int\frac{df}{f(1+f)(1-f)} = \int dt \\
\Leftrightarrow\ & \int\frac{1}{f}\left(\frac{1}{1+f}+\frac{1}{1-f}\right)df = 2\int dt \\
\Leftrightarrow\ & \int\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{1+f}\right)df + \int\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{1-f}\right)df = 2\int dt \\
\Leftrightarrow\ & \log\left|\frac{f}{1+f}\right| + \log\left|\frac{f}{1-f}\right| = 2t + C' \\
\Leftrightarrow\ & \frac{f^2}{1-f^2} = Ce^{2t} \\
\Leftrightarrow\ & f(t) = \pm\sqrt{\frac{Ce^{2t}}{1+Ce^{2t}}}
\end{aligned}$$

積分方程式に $t = 0$ を代入すると $f(0) = a$

よって $C = \dfrac{a^2}{1-a^2}$ で

$$\begin{aligned}
& f(t) = \pm\sqrt{\frac{Ce^{2t}}{1+Ce^{2t}}} \\
\Leftrightarrow\ & f(t) = \pm\sqrt{\frac{a^2e^{2t}}{1-a^2+a^2e^{2t}}}
\end{aligned}$$

(c) $f(t) = \pm\sqrt{\dfrac{a^2}{\frac{1-a^2}{e^{2t}}+a^2}}$ より

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \pm 1$$

※ ただし $a = 0$ のときは 0