数学及力学演習 L 第 10 回（1/21） 解答

問題 1

(1) x 成分について考える。

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_x \\
&= \left\{\mathrm{rot}\left(\frac{3\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^5} - \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{r}|^3}\right)\right\}_x \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,z}{|\boldsymbol{r}|^5} - \frac{a_z}{|\boldsymbol{r}|^3}\right) - \\
&\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,y}{|\boldsymbol{r}|^5} - \frac{a_y}{|\boldsymbol{r}|^3}\right) \\
&= \frac{3a_y z\,|\boldsymbol{r}|^5 - 3\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,z\cdot 5y\,|\boldsymbol{r}|^3}{|\boldsymbol{r}|^{10}} + \frac{a_z\cdot 3y\,|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{r}|^6} - \\
&\quad \frac{3a_z y\,|\boldsymbol{r}|^5 - 3\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,y\cdot 5z\,|\boldsymbol{r}|^3}{|\boldsymbol{r}|^{10}} - \frac{a_y\cdot 3z\,|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{r}|^6} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

同様にして $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_y = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_z = 0$ なので、
$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ がいえた。

(2) $-\mathrm{grad}\,\phi$ の x 成分について考える。

$$
\begin{aligned}
&(-\mathrm{grad}\,\phi)_x \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{a_x x + a_y y + a_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} \\
&= -\frac{a_x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \\
&\quad \frac{(a_x x + a_y y + a_z z)\cdot 3x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{3\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,x}{|\boldsymbol{r}|^5} - \frac{a_x}{|\boldsymbol{r}|^3}
\end{aligned}
$$

同様にして、結果として

$$
-\mathrm{grad}\,\phi = \frac{3\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^5} - \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{r}|^3}
$$

となるので、
ϕ は $\boldsymbol{A}$ のスカラーポテンシャルである。

(3) x 成分に由来する部分を計算する。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}A_x \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{3\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,x}{|\boldsymbol{r}|^5} - \frac{a_x}{|\boldsymbol{r}|^3}\right\} \\
&= \frac{\{3\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) + 3a_x x\}\,|\boldsymbol{r}|^5 - 3\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,x\cdot 5x\,|\boldsymbol{r}|^3}{|\boldsymbol{r}|^{10}} + \\
&\quad \frac{3x\,|\boldsymbol{r}|\,a_x}{|\boldsymbol{r}|^6} \\
&= 3\,\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^5} + 3\,\frac{a_x x}{|\boldsymbol{r}|^5} - 15\,\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^7}\,x^2 + 3\,\frac{a_x x}{|\boldsymbol{r}|^5} \\
&= 3\,\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^5} + 6\,\frac{a_x x}{|\boldsymbol{r}|^5} - 15\,\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^7}\,x^2
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z \\
&= 9\,\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^5} + 6\,\frac{a_x x + a_y y + a_z z}{|\boldsymbol{r}|^5} - 15\,\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^7}\left(x^2+y^2+z^2\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(4) x 成分について考える。

$$
\begin{aligned}
&\left\{\mathrm{rot}\left(\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\right)\right\}_x \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\frac{a_x y - a_y x}{|\boldsymbol{r}|^3} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{a_z x - a_x z}{|\boldsymbol{r}|^3} \\
&= \frac{a_x}{|\boldsymbol{r}|^3} - \frac{3\,(a_x y - a_y x)}{|\boldsymbol{r}|^5}\,y + \frac{a_x}{|\boldsymbol{r}|^3} + \frac{3\,(a_z x - a_x z)}{|\boldsymbol{r}|^5}\,z \\
&= \frac{2a_x}{|\boldsymbol{r}|^3} + \frac{3}{|\boldsymbol{r}|^5}\left\{(a_y y + a_z z)\,x - a_x\left(y^2+z^2\right)\right\} \\
&= \frac{2a_x}{|\boldsymbol{r}|^3} + \frac{3}{|\boldsymbol{r}|^5}\left\{(a_x x + a_y y + a_z z)\,x - a_x\left(x^2+y^2+z^2\right)\right\} \\
&= \frac{3\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,x}{|\boldsymbol{r}|^5} - \frac{a_x}{|\boldsymbol{r}|^3}
\end{aligned}
$$

同様にして、結果として

$$
\mathrm{rot}\left(\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\right) = \frac{3\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^5} - \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{r}|^3}
$$

となるので、
$\boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{A}$ のベクトルポテンシャルである。

問題 2

原点からある点までのベクトル $\boldsymbol{r}$ について、

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とすると

$$\operatorname{grad} r^2 = \operatorname{grad}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{grad} r^2 \cdot d\boldsymbol{S} &= \iiint_V \operatorname{div} \operatorname{grad} r^2 \, dV \\ &= \iiint_V \operatorname{div} 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dV \\ &= \iiint_V 2\,(1+1+1)\,dV \\ &= 6V\end{aligned}$$

（1 行目の変形は Gauss の発散定理による）

したがって

$$V = \frac{1}{6}\iint_S \operatorname{grad} r^2 \cdot d\boldsymbol{S}$$

問題 3

(1)

$$\begin{aligned}&\left\{\iint_{S_2} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{S}\right\}_x \\ &= \left\{\iint_{S_2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{pmatrix}\right\}_x \\ &= \iint_{S_2} y\,dS_z - z\,dS_y \\ &= \iint_{S_2} \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iiint_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} dV \\ &= 0\end{aligned}$$

同様にして

$$\left\{\iint_{S_2} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{S}\right\}_y = \left\{\iint_{S_2} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{S}\right\}_z = 0$$

よって

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\left\{-\iint_{S_1} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{S}\right\}_x \\ &= \left\{-\iint_{S_1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{pmatrix}\right\}_x \\ &= \iint_{S_1} z\,dS_y - y\,dS_z \\ &= \iint_{S_1} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iint_{S_1} \operatorname{rot} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \int_{C_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}\end{aligned}$$

（↑ Stokes の定理）

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\int_{C_1} \left(x^2+y^2+z^2\right) dx \\ &= \left\{\frac{1}{2}\int_{C_1} |\boldsymbol{r}|^2 \, d\boldsymbol{r}\right\}_x\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\left\{\iint_{S_2} 1\,d\boldsymbol{S}\right\}_x &= \left\{\iint_{S_2} 1\begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{pmatrix}\right\}_x \\ &= \iint_{S_2} 1\,dS_x \\ &= \iint_{S_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iiint_{V_2} \operatorname{div} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dV \\ &= 0\end{aligned}$$

同様にして

$$\left\{\iint_{S_2} 1\,d\boldsymbol{S}\right\}_y = \left\{\iint_{S_2} 1\,d\boldsymbol{S}\right\}_z = 0$$

よって

$$\iint_{S_2} d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$$

(4)
$$\iint_{S_2} (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{V_2} \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})\, dV = \iiint_{V_2} 0 \; dV = 0$$

(5)
$$\begin{aligned}
&\left\{ -\iint_{S_2} \boldsymbol{A} \times d\boldsymbol{S} \right\}_x \\
&= -\iint_{S_2} A_y\, dS_z - A_z\, dS_y \\
&= \iint_{S_2} \begin{pmatrix} 0 \\ A_z \\ -A_y \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \iiint_{V_2} \mathrm{div} \begin{pmatrix} 0 \\ A_z \\ -A_y \end{pmatrix} dV \\
&= \iiint_{V_2} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dV \\
&= \iiint_{V_2} (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_x\, dV
\end{aligned}$$

y 成分、z 成分についても同様にして

$$-\iint_{S_2} \boldsymbol{A} \times d\boldsymbol{S} = \iiint_{V_2} (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})\, dV$$

が示される。

(6)
$$\begin{aligned}
&\left\{ -\iint_{S_1} (\mathrm{grad}\,\phi) \times d\boldsymbol{S} \right\}_x \\
&= \iint_{S_1} \frac{\partial \phi}{\partial z}\, dS_y - \frac{\partial \phi}{\partial y}\, dS_z \\
&= \iint_{S_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \iint_{S_1} \mathrm{rot} \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \int_{C_1} \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \left\{ \int_{C_1} \phi\, d\boldsymbol{r} \right\}_x
\end{aligned}$$

y 成分、z 成分についても同様にして

$$-\iint_{S_1} (\mathrm{grad}\,\phi) \times d\boldsymbol{S} = \int_{C_1} \phi\, d\boldsymbol{r}$$

が示される。

問題 4

(1)
$$\iint_{S_1} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_1} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\, dS = \iint_{S_1} \frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2}\, dS = \iint_{S_1} dS = 4\pi$$

※閉曲面が原点を含むときは、

Gauss の発散定理を使えない。

$$\iint_{S_2} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{V_1} \mathrm{div}\, \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\, dV \quad \text{(a)}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
&= \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 3x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} \\
&= \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right) - 3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\, \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \\
&= \frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right) - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&= 0 \quad \text{(b)}
\end{aligned}$$

となって (a) $= 0$

(2) (b) より

$$\iint_{S_4} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{V} \mathrm{div}\, \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\, dV = 0 \quad \text{(c)}$$

※原点を内部に含まないので

Gauss の発散定理が使える。

S_3 が原点を含む閉曲面であるとき、
$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を上手にとれば
$|\boldsymbol{r}|^2 = 1$ となる閉曲面 S_5 を
S_3 の内部にとることが可能である。
この S_5 は、$|\boldsymbol{r}|^2 = 1$ より原点を含む。

すると (c) より

$$\iint_{S_3-S_5} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

よって

$$\begin{aligned}\iint_{S_3} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{S_5} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iint_{S_5} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \, dS \\ &= \iint_{S_5} \frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2} \, dS \\ &= \iint_{S_5} dS \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

問題 5

1.
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_z = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y)$$

Stokes の定理

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

にこれを代入する。

（左辺）

$$= \int_C P(x,y)\; dx + Q(x,y)\; dy$$

（右辺）

$$\begin{aligned}&= \iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iint_D \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right) dx\,dy \\ &= \iint_D \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} dx\,dy \\ &= \iint_D \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx\,dy \\ &= \iint_D \left\{\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} P(x,y)\right\} dx\,dy\end{aligned}$$

よって成立する。

2.
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると、Stokes の定理より

$$\begin{aligned}&\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \\ &= \int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iint_S \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} Q \\ \frac{\partial}{\partial z} P \\ \frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial y} P \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial y} P \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{S}\end{aligned}$$

（P も Q も z に依存しない）

ここで、Gauss の発散定理より

$$\begin{aligned}&\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial y} P \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iiint_V \mathrm{div} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial y} P \end{pmatrix} dV \\ &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz\end{aligned}$$

よって成立する。