数学及力学演習 L 第 11 回（1/23） 解答

問題 1

1. オイラーの微分方程式より

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & y - \frac{dy'}{dx} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & y - y'' = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \bar{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}
\end{aligned}
$$

初期条件から
$C_1 = \dfrac{e}{e^2-1}\,,\, C_2 = -\dfrac{e}{e^2-1}$ なので

$$
\bar{y} = \frac{e}{e^2-1}\left(e^{x} - e^{-x}\right)
$$

2. 1. で求めた $\bar{y}$ を $L\left(x, y, y'\right)$ に代入する。

$$
\begin{aligned}
&L\left(x, \bar{y}, \bar{y}'\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e}{e^2-1}\right)^2\left(e^{x} - e^{-x}\right)^2 + \\
&\quad \frac{1}{2}\left(\frac{e}{e^2-1}\right)^2\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e}{e^2-1}\right)^2\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
J\left[\bar{y}\right] &= \left(\frac{e}{e^2-1}\right)^2 \int_0^1 \left(e^{2x} + e^{-2x}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e}{e^2-1}\right)^2\left(\frac{e^4-1}{e^2}\right) \\
&= \frac{e^2+1}{2\left(e^2-1\right)}
\end{aligned}
$$

3. $\omega\left(0\right) = 0\,,\, \omega\left(1\right) = 0$ なる $\omega\left(x\right)$ を定め、
$y = \bar{y} + \omega\left(x\right)$ とすると

$$
\begin{aligned}
&J\left[y\right] \\
&= J\left[\bar{y} + \omega\right] \\
&= \int_0^1 \left\{\frac{1}{2}\left(\bar{y} + \omega\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\bar{y}' + \omega'\right)^2\right\} dx \\
&= \int_0^1 \left\{\frac{1}{2}\left(\bar{y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\bar{y}'\right)^2\right\} dx + \\
&\quad \int_0^1 \left\{\frac{1}{2}\,\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\omega'\right)^2\right\} dx + \\
&\quad \int_0^1 \left(\bar{y}\,\omega + \bar{y}'\omega'\right) dx \\
&= J\left[\bar{y}\right] + J\left[\omega\right] + \int_0^1 \left(\bar{y}\,\omega + \bar{y}'\omega'\right) dx
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\bar{y}\,\omega + \bar{y}'\omega'\right) dx \\
&= \frac{e}{e^2-1}\int_0^1 \left\{\left(e^{x} - e^{-x}\right)\omega + \left(e^{x} + e^{-x}\right)\omega'\right\} dx \\
&= \frac{e}{e^2-1}\left\{\left[e^{x}\omega + e^{-x}\omega\right]_0^1 - \int_0^1 \left(e^{x} + e^{-x}\right)\omega'\,dx + \right. \\
&\quad \left. \int_0^1 \left(e^{x} + e^{-x}\right)\omega'\,dx\right\} \\
&= 0 \quad \text{(a)}
\end{aligned}
$$

また、$L\left(x, y, y'\right) = \dfrac{1}{2}\,y^2 + \dfrac{1}{2}\left(y'\right)^2 \geq 0$ より
$J\left[y\right] \geq 0$ (b)

よって

$$
\begin{aligned}
J\left[\bar{y} + \omega\right] &= J\left[\bar{y}\right] + J\left[\omega\right] + \int_0^1 \left(\bar{y}\,\omega + \bar{y}'\omega'\right)\,dx \\
&= J\left[\bar{y}\right] + J\left[\omega\right] \quad \text{※ (a) より} \\
&\geq J\left[\bar{y}\right] \quad \text{※ (b) より}
\end{aligned}
$$

以上より、$J\left[\bar{y}\right]$ は $J\left[y\right]$ の最小値である。

問題 2

(1) y の項が入っていないときの
オイラーの微分方程式より、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \\
&\Leftrightarrow 2y'\left(y'-2\right)^2 + 2\left(y'\right)^2\left(y'-2\right) = C_1 \\
&\Leftrightarrow y'\left(y'-1\right)\left(y'-2\right) = C_2 \\
&\Leftrightarrow y' = C_3 \\
&\quad (\text{ただし } C_3\left(C_3-1\right)\left(C_3-2\right) = C_2) \\
&\Leftrightarrow y = C_3 x + C_4
\end{aligned}
$$

初期条件から C_3 , C_4 を求めて

$$y = x$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 12x - \frac{d}{dx}\left(2y'\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 12x - 2y'' = 0 \\
&\Leftrightarrow y'' = 6x \\
&\Leftrightarrow y' = 3x^2 + C_1 \\
&\Leftrightarrow y = x^3 + C_1 x + C_2
\end{aligned}
$$

初期条件から C_1 , C_2 を求めて

$$y = x^3$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2y + 2y' + x^2 - \frac{d}{dx}\left(2y + 2y' + x^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2y - 2y'' = -x^2 + 2x
\end{aligned}
$$

斉次方程式の解は $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
$C_1 \to C_1(x)$, $C_2 \to C_2(x)$ とおいて
上記の微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} -2\,C_1'(x)\,e^x + 2\,C_2'(x)\,e^{-x} = -x^2 + 2x \\ C_1'(x)\,e^x + C_2'(x)\,e^{-x} = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{1}{4}\left(x^2 - 2x\right)e^{-x} \\ C_2'(x) = -\dfrac{1}{4}\left(x^2 - 2x\right)e^{x} \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 e^{-x} + C_3 \\ C_2(x) = -\dfrac{1}{4}\left(x^2 - 4x + 4\right)e^{x} + C_4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

よって一般解は

$$y(x) = C_3 e^x + C_4 e^{-x} - \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + 2\right)$$

初期条件から C_3 , C_4 を求めて

$$y(x) = \frac{2e^2}{e^4 - 1}\left(e^x - e^{-x}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + 2\right)$$

(4) x の項が入っていないときの
オイラーの微分方程式より、

$$
\begin{aligned}
&F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}}{y} - y'\frac{1}{y}\frac{y'}{\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}} = C_1 \\
&\Leftrightarrow \left\{1 + \left(y'\right)^2\right\} - \left(y'\right)^2 = C_1 y\sqrt{1 + \left(y'\right)^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{C_1 y}\right)^2 - 1} \\
&\Leftrightarrow \int\sqrt{\frac{C_1^2\,y^2}{1 - C_1^2\,y^2}}\,dy = \pm\int dx \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{C_1}\sqrt{1 - C_1^2\,y^2} = x + C_2
\end{aligned}
$$

初期条件から C_1 , C_2 を求めて

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{1 - y^2} = x - 1 \\
&\Leftrightarrow 1 - y^2 = \left(x - 1\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \left(x - 1\right)^2 + y^2 = 1
\end{aligned}
$$

(5) y の項が入っていないときの
オイラーの微分方程式より、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \\
&\Leftrightarrow 2\left(x^2 + 1\right)^2 y' = C_1 \\
&\Leftrightarrow \int 2\,dy = \int \frac{C_1}{\left(x + 1\right)^2}\,dx \\
&\Leftrightarrow 2y = -\frac{C_1}{x + 1} + C_2 \\
&\Leftrightarrow y = -\frac{C_1}{2\left(x + 1\right)} + \frac{C_2}{2}
\end{aligned}
$$

初期条件から C_1 , C_2 を求めて

$$y = \frac{2}{x + 1} - 1$$

問題 3

運動方程式 $ma = F - kv$ より、

$F = ma + kv = mv' + kv$

よって全体の燃料消費は

$$\int_0^T CF^2\,dt = \int_0^T C\left(mv' + kv\right)^2 dt$$

t の項がないときの

オイラーの微分方程式より、

$$\begin{aligned}
& F - v'\frac{\partial F}{\partial v'} = C_1 \\
\Leftrightarrow\ & C\left(mv' + kv\right)^2 - v'\left\{C \cdot 2m\left(mv' + kv\right)\right\} = C_1 \\
\Leftrightarrow\ & Ck^2v^2 - Cm^2\left(v'\right)^2 = C_1 \\
\Leftrightarrow\ & v' = \pm\frac{1}{m}\sqrt{k^2v^2 - \frac{C_1}{C}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{m}{k}\int \frac{1}{\sqrt{v^2 - \frac{C_1}{Ck^2}}}\,dv = \pm\int dt \\
\Leftrightarrow\ & \log\left|v + \sqrt{v^2 - \frac{C_1}{Ck^2}}\right| = \pm\frac{k}{m}\,t + C_2 \\
\Leftrightarrow\ & v + \sqrt{v^2 - \frac{C_1}{Ck^2}} = C_3 e^{\pm\frac{k}{m}t} \\
\Leftrightarrow\ & v = \frac{C_3}{2}\,e^{\pm\frac{k}{m}t} + \frac{C_1}{2\,C_3\,Ck^2}\,e^{\mp\frac{k}{m}t}
\end{aligned}$$

初期条件より

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} v\left(0\right) = 0 \\ v\left(T\right) = V \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 0 = \dfrac{C_3}{2} + \dfrac{C_1}{2\,C_3\,Ck^2} \\ V = \dfrac{C_3}{2}\,e^{\pm\frac{k}{m}T} + \frac{C_1}{2\,C_3\,Ck^2}\,e^{\mp\frac{k}{m}T} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{C_3}{2} = -\frac{C_1}{2\,C_3\,Ck^2} = \frac{V}{e^{\frac{k}{m}T} - e^{-\frac{k}{m}T}}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
v\left(t\right) &= \frac{V}{e^{\frac{k}{m}T} - e^{\frac{k}{m}T}}\left(e^{\frac{k}{m}t} - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\
&= \frac{V}{e^{kT} - e^{-kT}}\left(e^{kt} - e^{-kt}\right) \\
&= \frac{2V}{e^{kT} - e^{-kT}}\ \sinh\left(kt\right)
\end{aligned}$$

問題 4

(A)

1. $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{2gx}$ より、

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_1} dt &= \int_0^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{2gx}} \\
&= \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}}{\sqrt{2gx}}\,dx
\end{aligned}$$

2. y の項が入っていないときの

オイラーの微分方程式より、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2gx}}\frac{y'}{\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}} = C_1 \\
\Leftrightarrow\ & \left(y'\right)^2 = C_1^2\left(2gx\right)\left\{1 + \left(y'\right)^2\right\} \\
\Leftrightarrow\ & y' = \sqrt{\frac{2\,C_1^2 gx}{1 - 2\,C_1^2 gx}} \\
& \quad = \sqrt{\frac{x}{\frac{1}{2C_1^2 g} - x}} \\
& \quad = \sqrt{\frac{x}{2a - x}}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\theta} &= \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta} \\
&= \sqrt{\frac{x}{2a - x}}\,a\sin\theta \\
&= a\left(1 - \cos\theta\right) \\
\Leftrightarrow y &= a\left(\theta - \sin\theta\right) + C_1
\end{aligned}$$

$\theta = 0$ のとき $x\,,\,y = 0$ なので $C_1 = 0$

したがって

$$y = a\left(\theta - \sin\theta\right)$$

(B) 講義でもやらなかったので省略します。

ていうか解けてない（笑）