# 数学及力学演習 L 第 12 回（1/30） 解答

## 問題 1

1. $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ の条件下で
$f(x,y)=4xy$ を最大にする。

$$\begin{aligned} h(x,y) &\equiv f(x,y)+\lambda g(x,y) \\ &= 4xy+\lambda\left(x^2+y^2-1\right) \end{aligned}$$

これより

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}h(x,y)=4y+2\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}h(x,y)=4x+2\lambda y=0 \\ g(x,y)=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda=-2 \end{cases}$$

したがって $f(x,y)=2$ が最大。

2. $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ の条件下で

$$\begin{aligned} & f(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= 9x^2+12y^2+9z^2-6xy-6yz \end{aligned}$$

を最大、最小にする。

$$h(x,y)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

に対して

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}h(x,y,z)=18x-6y+2\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}h(x,y,z)=24y-6x-6z+2\lambda y=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z}h(x,y,z)=18z-6y+2\lambda z=0 \\ g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \mp\dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ -15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -9 \end{pmatrix}$$

それぞれの場合の $f(x,y,z)$ は $9,6,15$
したがって最大値 15、最小値 6

## 問題 2

$$J=\int_{-C}^{C}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=l$$

の条件下で、$I=\displaystyle\int_{-C}^{C}y\,dx$ を最大にする。

$$\begin{aligned} H &\equiv \int_{-C}^{C}\left(y+\lambda\sqrt{1+(y')^2}\right)dx \\ &\equiv \int_{-C}^{C}F\,dx \end{aligned}$$

として、$H$ の停留曲線を求める。
$x$ の項が入っていないときの
オイラーの微分方程式より、

$$\begin{aligned} & F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=C_1 \\ \Leftrightarrow\ & y+\lambda\sqrt{1+(y')^2}-y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=C_1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{\lambda}{y-C_1}\right)^2-1} \\ & \qquad =\frac{\sqrt{\lambda^2-(y-C_1)^2}}{y-C_1} \\ \Leftrightarrow\ & \int\frac{y-C_1}{\sqrt{\lambda^2-(y-C_1)^2}}dy=\int dx \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{\lambda^2-(y-C_1)^2}=x+C_2 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2-(y-C_1)^2=(x+C_2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x+C_2)^2+(y-C_1)^2=\lambda^2 \end{aligned}$$

この曲線が $(x,y)=(-C,1),(C,1)$ を通るので、
各座標を代入して解くと $C_2=0$ となり

$$x^2+(y-C_1)^2=\lambda^2$$

$J$ に代入して

$$
\begin{aligned}
J &= \int_{-C}^{C} \sqrt{1+(y')^2}\,dx \\
&= \int_{-C}^{C} \frac{\lambda}{y-C_1}\,dx \\
&= \int_{-C}^{C} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}\,dx \\
&= \int_{-C}^{C} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}}\,dx \\
&= \left[\lambda\cdot\arcsin\frac{x}{\lambda}\right]_{-C}^{C} \\
&= 2\lambda\cdot\arcsin\frac{C}{\lambda} \\
&= l
\end{aligned}
$$

を満たす $\lambda$ をとればよい。

**問題 3**

1. 光の移動時間は

$$
\begin{aligned}
\int dt &= \int \frac{dr}{V_0} \\
&= \frac{1}{V_0}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx \\
&\equiv \frac{1}{V_0}\int_{x_1}^{x_2} F\,dx
\end{aligned}
$$

これを最小にするように $y$ をとればよい。
$y$ の項が入っていないときの
オイラーの微分方程式より、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1 \\
\Leftrightarrow\ &y' = \pm\sqrt{\frac{C_1^2}{1-C_1^2}} \\
\Leftrightarrow\ &y = \pm\sqrt{\frac{C_1^2}{1-C_1^2}}\,x + C_2
\end{aligned}
$$

この直線が点 $(x_1, y_1)$ , $(x_2, y_2)$ を通ることから

$$
\begin{cases}
\sqrt{\dfrac{C_1^2}{1-C_1^2}} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\
C_2 = \dfrac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1}
\end{cases}
$$

よって

$$
y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\,x + \frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1}
$$

2. $P_1(x_1, y_1)$ , $P_2(x_2, y_2)$ とする。
$P_1$ から $P_2$ まで進むのにかかる時間 $T$ は、
$\theta_1$ と $\theta_2$ の関数として

$$
\begin{aligned}
T(\theta_1,\theta_2) &= \frac{P_1Q}{V_1} + \frac{QP_2}{V_2} \\
&= \frac{y_1}{V_1\cos\theta_1} - \frac{y_2}{V_2\cos\theta_2}
\end{aligned}
$$

条件は、$P_1$ と $P_2$ が定点であることから

$$
\begin{aligned}
U(\theta_1,\theta_2) &\equiv y_1\tan\theta_1 - y_2\tan\theta_2 \\
&= C_1
\end{aligned}
$$

よって
$V(\theta_1,\theta_2) = T(\theta_1,\theta_2) + \lambda U(\theta_1,\theta_2)$ とおくと

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial\theta_1} = \dfrac{y_1}{\cos^2\theta_1}\left(\dfrac{\sin\theta_1}{V_1}+\lambda\right) = 0 \\
\dfrac{\partial V}{\partial\theta_2} = -\dfrac{y_2}{\cos^2\theta_2}\left(\dfrac{\sin\theta_2}{V_2}+\lambda\right) = 0
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow\ -\lambda = \frac{\sin\theta_1}{V_1} = \frac{\sin\theta_2}{V_2}
$$

となって Snell の法則が示された。

3. 2. と同じように考えて

$$\begin{aligned}\int dt &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{V_0(1-\alpha y)}\,dx \\ &= \frac{1}{V_0}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{1-\alpha y}\,dx \\ &\equiv \frac{1}{V_0}\int_{x_1}^{x_2} F\,dx\end{aligned}$$

これを最小にするように $y$ をとる。
$x$ の項が入っていないときの
オイラーの微分方程式より、

$$\begin{aligned}&F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{1-\alpha y} - y'\frac{y'}{(1-\alpha y)\sqrt{1+(y')^2}} = C_1 \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left\{\frac{1}{C_1(1-\alpha y)}\right\}^2 - 1} \\ &\qquad = \frac{\sqrt{1-C_1^2(1-\alpha y)^2}}{C_1(1-\alpha y)} \\ &\Leftrightarrow \int \frac{C_1(1-\alpha y)}{\sqrt{1-C_1^2(1-\alpha y)^2}}\,dy = \int dx \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha C_1}\sqrt{1-C_1^2(1-\alpha y)^2} = x + C_2 \\ &\Leftrightarrow 1 - C_1^2(1-\alpha y)^2 = \alpha^2 C_1^2 (x+C_2)^2 \\ &\Leftrightarrow (x+C_2)^2 + \left(y - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2 C_1^2}\end{aligned}$$

この曲線が点 $(x_1, y_1)$ , $(x_2, y_2)$ を通ることから

$$\begin{cases} C_1^2 = \dfrac{1}{\alpha^2}\left\{\left(\dfrac{x_1-x_2}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \dfrac{1}{\alpha}\right)^2\right\}^{-1} \\ C_2 = -\dfrac{x_1+x_2}{2} \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned}&\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \\ =\ &\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2\end{aligned}$$