数学及力学演習 L 第 12 回 (1/30) 解答

問題 1

1. $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の条件下で
$f(x,y) = 4xy$ を最大にする。

$$\begin{aligned} h(x,y) &\equiv f(x,y) + \lambda g(x,y) \\ &= 4xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right) \end{aligned}$$

これより

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} h(x,y) = 4y + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} h(x,y) = 4x + 2\lambda y = 0 \\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

したがって $f(x,y) = 2$ が最大。

2. $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ の条件下で

$$\begin{aligned} & f(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= 9x^2 + 12y^2 + 9z^2 - 6xy - 6yz \end{aligned}$$

を最大、最小にする。

$$h(x,y) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

に対して

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} h(x,y,z) = 18x - 6y + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} h(x,y,z) = 24y - 6x - 6z + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} h(x,y,z) = 18z - 6y + 2\lambda z = 0 \\ g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \mp\dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ -15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -9 \end{pmatrix}$$

それぞれの場合の $f(x,y,z)$ は $9, 6, 15$
したがって最大値 15、最小値 6

問題 2

$$J = \int_{-C}^{C} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = l$$

の条件下で、$I = \displaystyle\int_{-C}^{C} y\, dx$ を最大にする。

$$\begin{aligned} H &\equiv \int_{-C}^{C} \left(y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2} \right) dx \\ &\equiv \int_{-C}^{C} F\, dx \end{aligned}$$

として、H の停留曲線を求める。
x の項が入っていないときの
オイラーの微分方程式より、

$$\begin{aligned} & F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \\ \Leftrightarrow\ & y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2} - y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{y - C_1}\right)^2 - 1} \\ & = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2}}{y - C_1} \\ \Leftrightarrow\ & \int \frac{y - C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2}}\, dy = \int dx \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2} = x + C_2 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2 - (y - C_1)^2 = (x + C_2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x + C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2 \end{aligned}$$

この曲線が $(x,y) = (-C, 1), (C, 1)$ を通るので、
各座標を代入して解くと $C_2 = 0$ となり

$$x^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2$$

J に代入して

$$\begin{aligned} J &= \int_{-C}^{C} \sqrt{1+(y')^2}\,dx \\ &= \int_{-C}^{C} \frac{\lambda}{y-C_1}\,dx \\ &= \int_{-C}^{C} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}\,dx \\ &= \int_{-C}^{C} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}}\,dx \\ &= \left[\lambda \cdot \arcsin\frac{x}{\lambda}\right]_{-C}^{C} \\ &= 2\lambda \cdot \arcsin\frac{C}{\lambda} \\ &= l \end{aligned}$$

を満たす λ をとればよい。

問題 3

1. 光の移動時間は

$$\begin{aligned} \int dt &= \int \frac{dr}{V_0} \\ &= \frac{1}{V_0}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx \\ &\equiv \frac{1}{V_0}\int_{x_1}^{x_2} F\,dx \end{aligned}$$

これを最小にするように y をとればよい。

y の項が入っていないときの

オイラーの微分方程式より、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1 \\ \Leftrightarrow\ &y' = \pm\sqrt{\frac{C_1^2}{1-C_1^2}} \\ \Leftrightarrow\ &y = \pm\sqrt{\frac{C_1^2}{1-C_1^2}}\,x + C_2 \end{aligned}$$

この直線が点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) を通ることから

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{C_1^2}{1-C_1^2}} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ C_2 = \dfrac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1} \end{cases}$$

よって

$$y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\,x + \frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1}$$

2. $P_1\,(x_1, y_1)$, $P_2\,(x_2, y_2)$ とする。

P_1 から P_2 まで進むのにかかる時間 T は、

θ_1 と θ_2 の関数として

$$\begin{aligned} T\,(\theta_1, \theta_2) &= \frac{P_1Q}{V_1} + \frac{QP_2}{V_2} \\ &= \frac{y_1}{V_1\cos\theta_1} - \frac{y_2}{V_2\cos\theta_2} \end{aligned}$$

条件は、P_1 と P_2 が定点であることから

$$\begin{aligned} U\,(\theta_1, \theta_2) &\equiv y_1\tan\theta_1 - y_2\tan\theta_2 \\ &= C_1 \end{aligned}$$

よって

$V\,(\theta_1, \theta_2) = T\,(\theta_1, \theta_2) + \lambda U\,(\theta_1, \theta_2)$ とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \theta_1} = \dfrac{y_1}{\cos^2\theta_1}\left(\dfrac{\sin\theta_1}{V_1} + \lambda\right) = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta_2} = -\dfrac{y_2}{\cos^2\theta_2}\left(\dfrac{\sin\theta_2}{V_2} + \lambda\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ -\lambda = \frac{\sin\theta_1}{V_1} = \frac{\sin\theta_2}{V_2}$$

となって Snell の法則が示された。

3. 2. と同じように考えて

$$\begin{aligned}\int dt &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{V_0(1-\alpha y)}\,dx \\ &= \frac{1}{V_0}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{1-\alpha y}\,dx \\ &\equiv \frac{1}{V_0}\int_{x_1}^{x_2} F\,dx\end{aligned}$$

これを最小にするように y をとる。

x の項が入っていないときの

オイラーの微分方程式より、

$$\begin{aligned}&F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{1-\alpha y} - y'\frac{y'}{(1-\alpha y)\sqrt{1+(y')^2}} = C_1 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left\{\frac{1}{C_1(1-\alpha y)}\right\}^2 - 1} \\ &\quad = \frac{\sqrt{1-C_1^2(1-\alpha y)^2}}{C_1(1-\alpha y)} \\ \Leftrightarrow\ &\int \frac{C_1(1-\alpha y)}{\sqrt{1-C_1^2(1-\alpha y)^2}}\,dy = \int dx \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{\alpha C_1}\sqrt{1-C_1^2(1-\alpha y)^2} = x + C_2 \\ \Leftrightarrow\ &1 - C_1^2(1-\alpha y)^2 = \alpha^2 C_1^2 (x+C_2)^2 \\ \Leftrightarrow\ &(x+C_2)^2 + \left(y - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2 C_1^2}\end{aligned}$$

この曲線が点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) を通ることから

$$\begin{cases} C_1^2 = \dfrac{1}{\alpha^2}\left\{\left(\dfrac{x_1-x_2}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \dfrac{1}{\alpha}\right)^2\right\}^{-1} \\ C_2 = -\dfrac{x_1+x_2}{2} \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned}&\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \\ &= \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2\end{aligned}$$