数学及力学演習 L 第 2 回（10/22） 解答

問題 1

(1) $y' + \alpha y = \beta$

$(y-\gamma)' + \alpha(y-\gamma) = 0$ という形に

変形できたとすると、

$y' + \alpha y = \alpha\gamma$ と

$y' + \alpha y = \beta$ を比較して

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$$

を得る。したがって微分方程式は

$$\left(y - \frac{\beta}{\alpha}\right)' + \alpha\left(y - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$$

と変形することができて

$$\begin{aligned}
&\frac{d\left(y-\frac{\beta}{\alpha}\right)}{dx} = -\alpha\left(y - \frac{\beta}{\alpha}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{d\left(y-\frac{\beta}{\alpha}\right)}{y-\frac{\beta}{\alpha}} = -\int \alpha\, dx\\
\Leftrightarrow\ &\log\left|y - \frac{\beta}{\alpha}\right| = -\alpha x + C'\\
\Leftrightarrow\ &y - \frac{\beta}{\alpha} = Ce^{-\alpha x}\\
\Leftrightarrow\ &y = Ce^{-\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha}
\end{aligned}$$

(2) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\cos x}{x}$

まず $y' + \dfrac{y}{x} = 0$ を解く。

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}\\
\Leftrightarrow\ &\log|y| = -\log|x| + C'\\
\Leftrightarrow\ &y = \frac{C}{x}
\end{aligned}$$

もとの微分方程式に $y = \dfrac{C(x)}{x}$ を代入する。

$$\begin{aligned}
&\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{\cos x}{x}\\
\Leftrightarrow\ &C'(x) = \cos x\\
\Leftrightarrow\ &C(x) = \sin x + C
\end{aligned}$$

したがって一般解は

$$y = \frac{\sin x + C}{x}$$

(3) $xy' - \alpha y - x^{\beta} = 0$

まず $xy' - \alpha y = 0$ を解く。

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{y} = \alpha\frac{dx}{x}\\
\Leftrightarrow\ &\log|y| = \alpha\log|x| + C'\\
\Leftrightarrow\ &y = Cx^{\alpha}
\end{aligned}$$

もとの微分方程式に $y = C(x)\,x^{\alpha}$ を代入する。

$$\begin{aligned}
&C'(x)\,x^{\alpha+1} + \alpha C(x)\,x^{\alpha} - \alpha C(x)\,x^{\alpha} - x^{\beta} = 0\\
\Leftrightarrow\ &C'(x) = x^{\beta-\alpha-1} \quad (*)\\
\Leftrightarrow\ &C(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}\,x^{\beta-\alpha} + C
\end{aligned}$$

したがって一般解は

$$\begin{aligned}
y &= \left(\frac{1}{\beta-\alpha}\,x^{\beta-\alpha} + C\right)x^{\alpha}\\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\,x^{\beta} + Cx^{\alpha}
\end{aligned}$$

※ただし $\alpha = \beta$ の場合は $(*)$ 以降が変わり

$$y = (\log|x| + C)\,x^{\alpha}$$

となる。

(4) $y' + xy = \dfrac{x}{y}$

$u = y^2$ とおくと、$u' = 2yy'$ で、

与えられた微分方程式は

$$\begin{aligned}
&y'y + xy^2 = x\\
\Leftrightarrow\ &u' + 2xu = 2x \quad (*)
\end{aligned}$$

と変形される。

まず $u' + 2xu = 0$ を解く。

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{u} = -2x\, dx\\
\Leftrightarrow\ &\log|u| = -x^2 + C'\\
\Leftrightarrow\ &u = Ce^{-x^2}
\end{aligned}$$

$(*)$ の微分方程式に

$u = C(x)\, e^{-x^2}$ を代入する。

$$C'(x)\, e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} C(x) + 2xC(x)\, e^{-x^2} = 2x$$
$$\Leftrightarrow C'(x) = 2xe^{x^2}$$
$$\Leftrightarrow C(x) = e^{x^2} + C$$

よって

$$u = \left(e^{x^2} + C\right) e^{-x^2} = 1 + Ce^{-x^2}$$

$u = y^2$ であったから

$$y = \pm\sqrt{1 + Ce^{-x^2}}$$

(5) $y' = 5x^2y^5 + \dfrac{y}{2x}$

$u = y^{-4}$ とおくと、$u' = -4y^{-5}y'$ で、
与えられた微分方程式は

$$y^{-5}y' - \frac{y^{-4}}{2x} = 5x^2$$
$$\Leftrightarrow -\frac{u'}{4} - \frac{u}{2x} = 5x^2 \quad (*)$$

と変形される。

まず $-\dfrac{u'}{4} - \dfrac{u}{2x} = 0$ を解く。

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{du}{u} = -2\frac{dx}{x}$$
$$\Leftrightarrow \log|u| = -2\log|x| + C'$$
$$\Leftrightarrow u = Cx^{-2}$$

$(*)$ の微分方程式に
$u = C(x)\, x^{-2}$ を代入する。

$$-\frac{C'(x)}{4}x^{-2} + \frac{C(x)}{2}x^{-3} - \frac{C(x)}{2x^3} = 5x^2$$
$$\Leftrightarrow C'(x) = -20x^4$$
$$\Leftrightarrow C(x) = -4x^5 + C$$

よって

$$u = \left(-4x^5 + C\right) x^{-2} = -4x^3 + Cx^{-2}$$

$u = y^{-4}$ であったから

$$y = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{u}},\ \pm\sqrt[4]{\frac{1}{u}}\, i = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{-4x^3 + Cx^{-2}}},\ \pm\sqrt[4]{\frac{1}{-4x^3 + Cx^{-2}}}\, i$$

(6) $y' = -y^2 \sin x + 2\dfrac{\tan x}{\cos x}$

$y = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{u}$ とおいて
微分方程式に代入すると

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{u'}{u^2} = -\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{u}\right)^2 \sin x + 2\frac{\tan x}{\cos x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{u'}{u^2} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{2}{u} + \sin x \frac{1}{u^2}$$
$$\Leftrightarrow u' = \frac{\sin x}{\cos x}2u + \sin x \quad (*)$$

まず $u' = \dfrac{\sin x}{\cos x}2u$ を解く。

$$\frac{du}{u} = 2\tan x\, dx$$
$$\Leftrightarrow \log|u| = -2\log|\cos x| + C'$$
$$\Leftrightarrow u = \frac{C}{\cos^2 x}$$

$(*)$ の微分方程式に
$u = \dfrac{C(x)}{\cos^2 x}$ を代入する。

$$\frac{C'(x)\cos^2 x + C(x)\cdot 2\cos x \sin x}{\cos^4 x} = 2\frac{\sin x}{\cos x}\frac{C(x)}{\cos^2 x} + \sin x$$
$$\Leftrightarrow C'(x) = \sin x \cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow C(x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C'$$

よって

$$u = -\frac{\cos^3 x + C}{3\cos^2 x}$$

$y = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{u}$ であったから

$$y = \frac{1}{\cos x} - \frac{3\cos^2 x}{\cos^3 x + C}$$

問題 2

(1) $y'(t) = \alpha y(t)$ より $y(t) = Ce^{\alpha t}$
初期条件 $y(0) = y_0$ から $C = y_0$ で

$$y(t) = y_0\, e^{\alpha t}$$

(2) (1) の式から

$$t = \frac{1}{\alpha} \log \frac{y(t)}{y_0}$$

よって

$$10 \text{ 倍となるには } \frac{1}{\alpha} \log 10$$
$$100 \text{ 倍となるには } \frac{2}{\alpha} \log 10$$
$$1000 \text{ 倍となるには } \frac{3}{\alpha} \log 10$$

だけ時間がかかる。

(3) $y'(t) = \{\alpha - \beta y(t)\}\, y(t)$ を解く。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\alpha - \beta y)\, y}\, dy = dt \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha - \beta y} + \frac{1}{y}\right) dy = dt \\
\Leftrightarrow\ & \log|y| - \log|\alpha - \beta y| = \alpha t + C' \\
\Leftrightarrow\ & \frac{y}{\alpha - \beta y} = Ce^{\alpha t} \quad (*) \\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{\alpha C e^{\alpha t}}{1 + \beta C e^{\alpha t}}
\end{aligned}$$

初期条件 $y(0) = y_0$ から $C = \dfrac{y_0}{\alpha - \beta y_0}$ で

$$y(t) = \frac{\alpha y_0\, e^{\alpha t}}{(\alpha - \beta y_0) + \beta y_0\, e^{\alpha t}}$$

(4) t の極限をとればよい。

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{\alpha y_0}{\beta y_0} = \frac{\alpha}{\beta}$$

(5) (3) の $(*)$ の式から

$$\frac{y(t)}{\alpha - \beta y(t)} = \frac{y_0}{\alpha - \beta y_0}\, e^{\alpha t}$$

限界量の半分 $\dfrac{\alpha}{2\beta}$ をこの式の $y(t)$ に代入して

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{\alpha}{2\beta}}{\alpha - \frac{\alpha}{2}} = \frac{y_0}{\alpha - \beta y_0}\, e^{\alpha t} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\beta} = \frac{y_0}{\alpha - \beta y_0}\, e^{\alpha t} \\
\Leftrightarrow\ & t = \frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{1}{\beta}\, \frac{\alpha - \beta y_0}{y_0}\right)
\end{aligned}$$

(6) $y'(t) = \left\{\dfrac{\alpha}{1 + \gamma t} - \beta y(t)\right\} y(t)$ を解く。

$$\begin{aligned}
&y' - \frac{\alpha}{1 + \gamma t}\, y + \beta y^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & y^{-2} y' - \frac{\alpha}{1 + \gamma t} y^{-1} + \beta = 0
\end{aligned}$$

$u = y^{-1}$ とおくと、$u' = -y^{-2} y'$ で、
微分方程式は

$$\begin{aligned}
&-u' - \frac{\alpha}{1 + \gamma t}\, u + \beta = 0 \\
\Leftrightarrow\ & u' + \frac{\alpha}{1 + \gamma t}\, u - \beta = 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

と変形される。

まず $u' + \dfrac{\alpha}{1 + \gamma t}\, u = 0$ を解く。

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{u} = -\frac{\alpha}{1 + \gamma t}\, dt \\
\Leftrightarrow\ & \log|u| = -\frac{\alpha}{\gamma} \log|1 + \gamma t| + C' \\
\Leftrightarrow\ & u = C(1 + \gamma t)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}
\end{aligned}$$

$(*)$ の微分方程式に
$u = C(t)(1 + \gamma t)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}$ を代入する。

$$\begin{aligned}
&C'(t)(1 + \gamma t)^{-\frac{\alpha}{\gamma}} - \alpha C(t)(1 + \gamma)^{-\frac{\alpha}{\gamma} - 1} + \\
&\frac{\alpha}{1 + \gamma t} \cdot C(t)(1 + \gamma t)^{-\frac{\alpha}{\gamma}} - \beta = 0 \\
\Leftrightarrow\ & C'(t) = \beta(1 + \gamma t)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \\
\Leftrightarrow\ & C(t) = \frac{\beta}{\alpha + \gamma}(1 + \gamma t)^{\frac{\alpha}{\gamma} + 1} + C
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
u &= \left\{\frac{\beta}{\alpha + \gamma}(1 + \gamma t)^{\frac{\alpha}{\gamma} + 1} + C\right\}(1 + \gamma t)^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \\
&= \frac{\beta}{\alpha + \gamma}(1 + \gamma t) + C(1 + \gamma t)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}
\end{aligned}$$

$u = y^{-1}$ であったから

$$y = \left\{\frac{\beta}{\alpha + \gamma}(1 + \gamma t) + C(1 + \gamma t)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}\right\}^{-1}$$

初期条件 $y(0) = y_0$ から $C = \dfrac{1}{y_0} - \dfrac{\beta}{\alpha + \gamma}$ で

$$y = \left\{\frac{\beta}{\alpha + \gamma}(1 + \gamma t) + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{\beta}{\alpha + \gamma}\right)(1 + \gamma t)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}\right\}^{-1}$$

(7) u が最小値をとるとき y は最大値をとるので、u の最小値について考える。

$$\frac{du}{dt} = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma} - C\alpha\left(1+\gamma t\right)^{-\frac{\alpha}{\gamma}-1}$$

$\dfrac{du}{dt} = 0$ として

$$\begin{aligned}
&\left(1+\gamma t\right)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}} = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}\frac{1}{C\alpha} \\
\Leftrightarrow\ & 1+\gamma t = \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}\frac{1}{C\alpha}\right)^{-\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\
\Leftrightarrow\ & t = \frac{1}{\gamma}\left\{\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}\frac{1}{C\alpha}\right)^{-\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} - 1\right\} \\
\Leftrightarrow\ & t = \frac{1}{\gamma}\left[\left\{\frac{\alpha\left(\alpha+\gamma-\beta y_0\right)}{\beta\gamma y_0}\right\}^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} - 1\right]
\end{aligned}$$

※ $\dfrac{du}{dt}\left(0\right) = \beta - \dfrac{\alpha}{y_0} \leq 0$ であることと

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{du}{dt} = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma} > 0$ であること、

および関数の連続性に注意すると、

唯一 $\dfrac{du}{dt} = 0$ となるこの点では

極小値（最小値）をとるしかない。

問題 3

(1) $y' + p\left(x\right)y = 0$

$$\begin{aligned}
& y' = -p\left(x\right)y \\
\Leftrightarrow\ & \int\frac{dy}{y} = -\int p\left(x\right)dx \\
\Leftrightarrow\ & \log|y| = -\int p\left(x\right)dx + C' \\
\Leftrightarrow\ & y = Ce^{-\int p(x)dx}
\end{aligned}$$

(2) $y' + p\left(x\right)y + q\left(x\right) = 0$

(1) の結果を利用する。

$y = C\left(x\right)e^{-\int p(x)dx}$ を微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned}
& C'\left(x\right)e^{-\int p(x)dx} - C\left(x\right)p\left(x\right)e^{-\int p(x)dx} + \\
& p\left(x\right)C\left(x\right)e^{-\int p(x)dx} + q\left(x\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & C'\left(x\right) = -e^{\int p(x)dx}q\left(x\right) \\
\Leftrightarrow\ & C\left(x\right) = -\int\left\{e^{\int p(x)dx}q\left(x\right)\right\}dx
\end{aligned}$$

したがって

$$y = -e^{-\int p(x)dx}\int\left\{e^{\int p(x)dx}q\left(x\right)\right\}dx$$