数学及力学演習 L 第 3 回（10/29） 解答

問題 1

$y = \sin\theta$ とおくと $dy = \cos\theta\, d\theta$

○ $y' = \cos\theta \geq 0$ となるとき

$$\begin{aligned}
&\left(y'\right)^2 = 1 - y^2 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = dx \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{1}{\cos\theta}\, \cos\theta\, d\theta = \int dx \\
\Leftrightarrow\ &\theta = x + C \\
\Leftrightarrow\ &\arcsin y = x + C \\
\Leftrightarrow\ &y = \sin\left(x + C\right)
\end{aligned}$$

○ $y' = \cos\theta < 0$ となるとき

$$\begin{aligned}
&\left(y'\right)^2 = 1 - y^2 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = -dx \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{1}{\cos\theta}\, \cos\theta\, d\theta = -\int dx \\
\Leftrightarrow\ &\theta = -x + C \\
\Leftrightarrow\ &\arcsin y = -x + C \\
\Leftrightarrow\ &y = \sin\left(-x + C\right)
\end{aligned}$$

また、特異解として $y = \pm 1$ が存在する。

問題 2

(1) $y - y\left(\bar{x}\right) = y'\left(\bar{x}\right)\left(x - \bar{x}\right)$

(2) 点 $\left(\bar{x}, y\left(\bar{x}\right)\right)$ を通る接線について

x 軸との交点の座標：$\left(\bar{x} - \dfrac{y\left(\bar{x}\right)}{y'\left(\bar{x}\right)}\, ,\, 0\right)$

y 軸との交点の座標：$\left(0\, ,\, y\left(\bar{x}\right) - \bar{x}\, y'\left(\bar{x}\right)\right)$

これら 2 点間の距離が a なので

$$\begin{aligned}
a^2 &= \left\{y\left(\bar{x}\right) - \bar{x}\, y'\left(\bar{x}\right)\right\}^2 + \left\{\bar{x} - \frac{y\left(\bar{x}\right)}{y'\left(\bar{x}\right)}\right\}^2 \\
&= \left[1 + \left\{\frac{1}{y'\left(\bar{x}\right)}\right\}^2\right] \left\{y\left(\bar{x}\right) - \bar{x}\, y'\left(\bar{x}\right)\right\}^2
\end{aligned}$$

$y\left(\bar{x}\right) \to y\, ,\ \bar{x} \to x$ とおいて整理すると

$$y = \pm\sqrt{\frac{a^2 y'^2}{y'^2 + 1}} + y'\, x$$

(3) $y' = p$（p は x の関数）とおくと

$$\begin{aligned}
y &= px + \sqrt{\frac{a^2 p^2}{p^2 + 1}} \\
&\equiv px + g\left(p\right)
\end{aligned}$$

両辺を x で微分して

$$p'\left\{x + g'\left(p\right)\right\} = 0$$

$p' = 0$ のときが一般解である。

$y' = p = C$ より、

$$\begin{aligned}
y &= Cx + \sqrt{\frac{a^2 C^2}{C^2 + 1}} \\
&= Cx - \frac{aC}{\sqrt{C^2 + 1}}
\end{aligned}$$

※もし $y' \geq 0$ となる点があったとすると、
その点での接線の第一象限での長さが
定義できなくなる。
したがって常に $y' = p = C < 0$
また、y 切片は常に正でなければならない。

(4) $x + g'\left(p\right) = 0$ のときが特異解である。

$$\begin{aligned}
g'\left(p\right) &= \left(-\frac{ap}{\sqrt{p^2+1}}\right)' \\
&= \ldots \\
&= -\frac{a}{\left(p^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

よって、x と y それぞれについて、
第一象限で考えていることに注意すると

$$\begin{aligned}
&x = \frac{a}{\left(p^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \\
\Leftrightarrow\ &x^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{p^2+1} \\
&y = \frac{ap}{\left(p^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ap}{\left(p^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad = -\frac{ap^3}{\left(p^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \\
\Leftrightarrow\ &y^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}} p^2}{p^2+1}
\end{aligned}$$

したがって
$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$
となる。

問題 3

(1) $(1+y)\,y''+(y')^2=0$

$y'=p$（p は y の関数）とおくと
$$\begin{aligned}y''&=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}\\&=p'\cdot p\end{aligned}$$
与えられた微分方程式を y , p を使って表すと
$$\begin{aligned}&(1+y)\,p'\cdot p+p^2=0\\\Leftrightarrow\ &p\left\{(1+y)\,p'+p\right\}=0\end{aligned}$$
○ $p=-(1+y)\,p'$ のとき
$$\begin{aligned}&p=-(1+y)\,\frac{dp}{dy}\\\Leftrightarrow\ &\frac{1}{p}\,dp=-\frac{1}{1+y}\,dy\\\Leftrightarrow\ &\log|p|=-\log|1+y|+C\\\Leftrightarrow\ &y'=p=\frac{C_1}{1+y}\\\Leftrightarrow\ &(1+y)\,dy=C_1dx\\\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}y^2+y=C_1x+C_2\end{aligned}$$
○ $p=0$ のとき

$\dfrac{dy}{dx}=0$ より、$y=C$

(2) $y=xy'+y'(1-y')$

$y'=p$（p は x の関数）とおくと
$$y=xp+p\,(1-p)$$
両辺を x で微分して
$$\begin{aligned}&p=p+xp'+p'-2pp'\\\Leftrightarrow\ &p'\,(x-2p+1)=0\end{aligned}$$
○ $p'=0$ のとき

$y'=p=C$ より、$y=Cx+C\,(1-C)$

○ $x-2p+1=0$ のとき
$$\begin{aligned}y&=x\cdot\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2}\left(\frac{1-x}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}\,(x+1)^2\end{aligned}$$

(3) $y''=2x\,(y')^2$

$y'=p$（p は x の関数）とおくと
$$\begin{aligned}&p'=2xp^2\\\Leftrightarrow\ &\int\frac{dp}{p^2}=\int 2x\,dx\\\Leftrightarrow\ &-\frac{1}{p}=x^2+C_1\\\Leftrightarrow\ &p=-\frac{1}{x^2+C_1}\end{aligned}$$
よって
$$\begin{aligned}y&=-\int\frac{1}{x^2+C_1}\,dx\\&=-\frac{1}{\sqrt{C_1}}\arctan\frac{x}{\sqrt{C_1}}+C_2\end{aligned}$$

(4) $2yy''-(y')^2+1=0$

$y'=p$（p は y の関数）とおくと
$$\begin{aligned}&2ypp'-p^2+1=0\\\Leftrightarrow\ &\frac{2p}{p^2-1}\,dp=\frac{1}{y}\,dy\\\Leftrightarrow\ &\log\left|p^2-1\right|=\log|y|+C\\\Leftrightarrow\ &p^2-1=C_1y\\\Leftrightarrow\ &p^2=C_1y+1\\\Leftrightarrow\ &\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y+1}\\\Leftrightarrow\ &\frac{dy}{\sqrt{C_1y+1}}=dx\\\Leftrightarrow\ &\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y+1}=x+C_2\\\Leftrightarrow\ &y=\frac{1}{C_1}\left[\left\{\frac{C_1}{2}\,(x+C_2)\right\}^2-1\right]\end{aligned}$$

問題 4

(1) $p=y'$（p は x の関数）

微分方程式の両辺を x で微分すると
$$p=f(p)+xf'(p)\,p'+g'(p)\,p'$$

(2) $\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{p-f(p)}{xf'(p)+g'(p)}$ の逆数をとって
$$x'(p)=\frac{x(p)\,f'(p)+g'(p)}{p-f(p)}$$

(3) まず $x'(p) - \dfrac{f'(p)}{p - f(p)} x(p) = 0$ を解く。

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{f'(p)}{p - f(p)} dp \equiv F(p)$$

$$\Leftrightarrow \log|x| = F(p) + C$$

$$\Leftrightarrow x = C_1 e^{F(p)}$$

$C_1 = C(p)$ とおいて

(2) の微分方程式に代入すると

$$\left\{C(p) e^{F(p)}\right\}' = \frac{f'(p) C(p) e^{F(p)} + g'(p)}{p - f(p)}$$

$$\Leftrightarrow C'(p) = e^{-F(p)} \cdot \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

$$\Leftrightarrow C(p) = \int \left\{e^{-F(p)} \cdot \frac{g'(p)}{p - f(p)}\right\} dp$$

したがって

$$x = \int \left\{\frac{g'(p)}{p - f(p)} \cdot e^{-\int \frac{f'(p)}{p - f(p)} dp}\right\} dp \times e^{\int \frac{f'(p)}{p - f(p)} dp}$$

(4) $y = xf(p) + g(p)$ に (3) の結果を
代入するだけです。
長ったらしくなるので省略。

(5) $f(x) = 1 + x$, $g(x) = x^2$ を代入すればよい。
まず

$$F(x) = \int \frac{f'(x)}{x - f(x)} dx = \int \frac{1}{x - (1 + x)} dx$$
$$= -x + C$$

(3) の結果より

$$x = \int \left(2p \cdot e^{p - C}\right) dp \times e^{C - p}$$
$$= \ldots$$
$$= 2(1 - p) + 2C_2 e^p$$

(4) の結果より

$$y = (1 + p) e^{C - p} \int \left(2p \cdot e^{p - C}\right) dp + p^2$$
$$= \ldots$$
$$= 2 - p^2 + 2C_2(1 + p) e^{-p}$$