数学及力学演習 L 第 3 回 (10/29) 解答

問題 1

$y = \sin\theta$ とおくと $dy = \cos\theta\, d\theta$

○ $y' = \cos\theta \geq 0$ となるとき

$$\begin{aligned}
&(y')^2 = 1 - y^2 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = dx \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{1}{\cos\theta}\, \cos\theta\, d\theta = \int dx \\
\Leftrightarrow\ &\theta = x + C \\
\Leftrightarrow\ &\arcsin y = x + C \\
\Leftrightarrow\ &y = \sin(x + C)
\end{aligned}$$

○ $y' = \cos\theta < 0$ となるとき

$$\begin{aligned}
&(y')^2 = 1 - y^2 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = -dx \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{1}{\cos\theta}\, \cos\theta\, d\theta = -\int dx \\
\Leftrightarrow\ &\theta = -x + C \\
\Leftrightarrow\ &\arcsin y = -x + C \\
\Leftrightarrow\ &y = \sin(-x + C)
\end{aligned}$$

また、特異解として $y = \pm 1$ が存在する。

問題 2

(1) $y - y(\bar{x}) = y'(\bar{x})(x - \bar{x})$

(2) 点 $(\bar{x}, y(\bar{x}))$ を通る接線について

x 軸との交点の座標：$\left(\bar{x} - \dfrac{y(\bar{x})}{y'(\bar{x})}, 0\right)$

y 軸との交点の座標：$(0, y(\bar{x}) - \bar{x}\, y'(\bar{x}))$

これら 2 点間の距離が a なので

$$\begin{aligned}
a^2 &= \{y(\bar{x}) - \bar{x}\, y'(\bar{x})\}^2 + \left\{\bar{x} - \frac{y(\bar{x})}{y'(\bar{x})}\right\}^2 \\
&= \left[1 + \left\{\frac{1}{y'(\bar{x})}\right\}^2\right] \{y(\bar{x}) - \bar{x}\, y'(\bar{x})\}^2
\end{aligned}$$

$y(\bar{x}) \to y$, $\bar{x} \to x$ とおいて整理すると

$$y = \pm\sqrt{\frac{a^2 y'^2}{y'^2 + 1}} + y'\, x$$

(3) $y' = p$(p は x の関数) とおくと

$$\begin{aligned}
y &= px + \sqrt{\frac{a^2 p^2}{p^2 + 1}} \\
&\equiv px + g(p)
\end{aligned}$$

両辺を x で微分して

$$p'\{x + g'(p)\} = 0$$

$p' = 0$ のときが一般解である。

$y' = p = C$ より、

$$\begin{aligned}
y &= Cx + \sqrt{\frac{a^2 C^2}{C^2 + 1}} \\
&= Cx - \frac{aC}{\sqrt{C^2 + 1}}
\end{aligned}$$

※ もし $y' \geq 0$ となる点があったとすると、
その点での接線の第一象限での長さが
定義できなくなる。
したがって常に $y' = p = C < 0$
また、y 切片は常に正でなければならない。

(4) $x + g'(p) = 0$ のときが特異解である。

$$\begin{aligned}
g'(p) &= \left(-\frac{ap}{\sqrt{p^2 + 1}}\right)' \\
&= \cdots \\
&= -\frac{a}{(p^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

よって、x と y それぞれについて、
第一象限で考えていることに注意すると

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a}{(p^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \\
\Leftrightarrow\ x^{\frac{2}{3}} &= \frac{a^{\frac{2}{3}}}{p^2 + 1} \\
y &= \frac{ap}{(p^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ap}{(p^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= -\frac{ap^3}{(p^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \\
\Leftrightarrow\ y^{\frac{2}{3}} &= \frac{a^{\frac{2}{3}} p^2}{p^2 + 1}
\end{aligned}$$

したがって

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

となる。

問題 3

(1) $(1+y)\,y'' + (y')^2 = 0$

$y' = p$(p は y の関数) とおくと

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} \\ &= p' \cdot p \end{aligned}$$

与えられた微分方程式を y , p を使って表すと

$$\begin{aligned} &(1+y)\,p' \cdot p + p^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & p\left\{(1+y)\,p' + p\right\} = 0 \end{aligned}$$

- $p = -(1+y)\,p'$ のとき

  $$\begin{aligned} & p = -(1+y)\frac{dp}{dy} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{p}\,dp = -\frac{1}{1+y}\,dy \\ \Leftrightarrow\ & \log|p| = -\log|1+y| + C \\ \Leftrightarrow\ & y' = p = \frac{C_1}{1+y} \\ \Leftrightarrow\ & (1+y)\,dy = C_1 dx \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}y^2 + y = C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

- $p = 0$ のとき

  $\dfrac{dy}{dx} = 0$ より、$y = C$

(2) $y = xy' + y'(1-y')$

$y' = p$(p は x の関数) とおくと

$$y = xp + p(1-p)$$

両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} & p = p + xp' + p' - 2pp' \\ \Leftrightarrow\ & p'(x - 2p + 1) = 0 \end{aligned}$$

- $p' = 0$ のとき

  $y' = p = C$ より、$y = Cx + C(1-C)$

- $x - 2p + 1 = 0$ のとき

  $$\begin{aligned} y &= x \cdot \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\left(\frac{1-x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(x+1)^2 \end{aligned}$$

(3) $y'' = 2x\,(y')^2$

$y' = p$(p は x の関数) とおくと

$p' = 2xp^2$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & \int \frac{dp}{p^2} = \int 2x\,dx \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{p} = x^2 + C_1 \\ \Leftrightarrow\ & p = -\frac{1}{x^2 + C_1} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} y &= -\int \frac{1}{x^2 + C_1}\,dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{C_1}} \arctan\frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2 \end{aligned}$$

(4) $2yy'' - (y')^2 + 1 = 0$

$y' = p$(p は y の関数) とおくと

$$\begin{aligned} & 2ypp' - p^2 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2p}{p^2 - 1}\,dp = \frac{1}{y}\,dy \\ \Leftrightarrow\ & \log\left|p^2 - 1\right| = \log|y| + C \\ \Leftrightarrow\ & p^2 - 1 = C_1 y \\ \Leftrightarrow\ & p^2 = C_1 y + 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y + 1} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{dy}{\sqrt{C_1 y + 1}} = dx \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y + 1} = x + C_2 \\ \Leftrightarrow\ & y = \frac{1}{C_1}\left[\left\{\frac{C_1}{2}(x + C_2)\right\}^2 - 1\right] \end{aligned}$$

問題 4

(1) $p = y'$(p は x の関数)

微分方程式の両辺を x で微分すると

$$p = f(p) + xf'(p)\,p' + g'(p)\,p'$$

(2) $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{p - f(p)}{xf'(p) + g'(p)}$ の逆数をとって

$$x'(p) = \frac{x(p)\,f'(p) + g'(p)}{p - f(p)}$$

(3) まず $x'(p) - \dfrac{f'(p)}{p - f(p)} x(p) = 0$ を解く。

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{f'(p)}{p - f(p)}\, dp \equiv F(p)$$

$$\Leftrightarrow \log|x| = F(p) + C$$

$$\Leftrightarrow x = C_1 e^{F(p)}$$

$C_1 = C(p)$ とおいて

(2) の微分方程式に代入すると

$$\left\{C(p)\, e^{F(p)}\right\}' = \frac{f'(p)\, C(p)\, e^{F(p)} + g'(p)}{p - f(p)}$$

$$\Leftrightarrow C'(p) = e^{-F(p)} \cdot \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

$$\Leftrightarrow C(p) = \int \left\{ e^{-F(p)} \cdot \frac{g'(p)}{p - f(p)} \right\} dp$$

したがって

$$x = \int \left\{ \frac{g'(p)}{p - f(p)} \cdot e^{-\int \frac{f'(p)}{p - f(p)} dp} \right\} dp \times e^{\int \frac{f'(p)}{p - f(p)} dp}$$

(4) $y = xf(p) + g(p)$ に (3) の結果を
代入するだけです。
長ったらしくなるので省略。

(5) $f(x) = 1 + x$, $g(x) = x^2$ を代入すればよい。
まず

$$F(x) = \int \frac{f'(x)}{x - f(x)}\, dx = \int \frac{1}{x - (1 + x)}\, dx$$
$$= -x + C$$

(3) の結果より

$$x = \int \left(2p \cdot e^{p - C}\right) dp \times e^{C - p}$$
$$= \dots$$
$$= 2(1 - p) + 2\, C_2\, e^{p}$$

(4) の結果より

$$y = (1 + p)\, e^{C - p} \int \left(2p \cdot e^{p - C}\right) dp + p^2$$
$$= \dots$$
$$= 2 - p^2 + 2\, C_2\, (1 + p)\, e^{-p}$$