

問題 1

$y = e^{ax}$ とおく。

$$(1) \quad 3y'' + 7y' + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 e^{ax} + 7ae^{ax} + 2e^{ax} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 7a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}, -2$$

よって

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 e^{-2x}$$

$$(2) \quad y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 e^{ax} + 4ae^{ax} + 4e^{ax} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \text{ (重解)}$$

$y = xe^{-2x}$ を代入すると

$$(-2e^{-2x} - 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}) +$$

$$4(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) + 4xe^{-2x} = 0$$

となってこれも解。

よって

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} \\ &= e^{-2x} (C_1 + C_2 x) \end{aligned}$$

$$(3) \quad y'''' - 16y = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 e^{ax} - 16e^{ax} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 4)(a^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \pm 2, \pm 2i$$

よって

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2ix} + C_4 e^{-2ix} \\ &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C'_3 \cos 2x + C'_4 \sin 2x \end{aligned}$$

(どちらの表現も可)

問題 2

※グラフは問題用紙の裏を参照してください。

$$(1) \quad (h = 0)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) + ky(t) = 0$$

$y(t) = e^{ax}$ において代入すると

$$a = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i$$

一般解は

$$y(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

また

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= -C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \\ &\quad C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \end{aligned}$$

初期条件より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y(0) = 0 \\ \frac{d}{dt} y(0) = v_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} = v_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \end{cases} \end{aligned}$$

したがって、このときの運動状態を表す式は

$$y(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$(2) \quad (h^2 < 4km)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) + h \frac{d}{dt} y(t) + ky(t) = 0$$

$y(t) = e^{ax}$ において代入すると

$$\begin{aligned} a &= -\frac{h}{2m} \pm \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} i \\ &\equiv -\gamma \pm \omega i \end{aligned}$$

一般解は

$$y(t) = e^{-\gamma t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

また

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= -\gamma e^{-\gamma t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \\ &\quad + e^{-\gamma t} (-C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) \end{aligned}$$

初期条件より

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y(0) = 0 \\ \frac{d}{dt}y(0) = v_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1\gamma + C_2\omega = v_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{v_0}{\omega} \end{cases} \end{aligned}$$

したがって、このときの運動状態を表す式は

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{v_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t \\ &= \frac{2mv_0}{\sqrt{4km - h^2}} e^{-\frac{h}{2m}t} \sin \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t \end{aligned}$$

(3) ($h^2 > 4km$)

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) + h \frac{d}{dt} y(t) + ky(t) = 0$$

$y(t) = e^{ax}$ において代入すると

$$\begin{aligned} a &= \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4km}}{2m} \\ &\equiv \lambda_{\pm} \end{aligned}$$

一般解は

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}$$

また

$$\frac{d}{dt} y(t) = C_1 \lambda_+ e^{\lambda_+ t} + C_2 \lambda_- e^{\lambda_- t}$$

初期条件より

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y(0) = 0 \\ \frac{d}{dt}y(0) = v_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \lambda_+ + C_2 \lambda_- = v_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} C_1 = \frac{v_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \\ C_2 = \frac{v_0}{\lambda_- - \lambda_+} \end{cases} \end{aligned}$$

したがって、このときの運動状態を表す式は

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{v_0}{\lambda_+ - \lambda_-} e^{\lambda_+ t} + \frac{v_0}{\lambda_- - \lambda_+} e^{\lambda_- t} \\ &= \frac{mv_0}{\sqrt{h^2 - 4km}} (e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}) \end{aligned}$$

(4) ($h^2 = 4km$)

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) + h \frac{d}{dt} y(t) + ky(t) = 0$$

$y(t) = e^{ax}$ において代入すると

$$a = -\frac{h}{2m}$$

一般解は

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{h}{2m}t} + C_2 t e^{-\frac{h}{2m}t}$$

また

$$\frac{d}{dt} y(t) = -C_1 \frac{h}{2m} e^{-\frac{h}{2m}t} + C_2 \left(1 - \frac{h}{2m}t\right) e^{-\frac{h}{2m}t}$$

初期条件より

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y(0) = 0 \\ \frac{d}{dt}y(0) = v_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 \frac{h}{2m} + C_2 = v_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = v_0 \end{cases} \end{aligned}$$

したがって、このときの運動状態を表す式は

$$y(t) = v_0 t e^{-\frac{h}{2m}t}$$

問題 3 $y'' + 2y' + y = 0$

(定数変化法)

齊次方程式の一般解を求める。

 $y = e^{ax}$ において代入すると $a = -1$ (重解)

よって

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \\ &= (C_1 + C_2 x) e^{-x} \end{aligned}$$

いま $y = \{C_1(x) + C_2(x)x\} e^{-x}$ とおくと

$$\begin{aligned} y' &= \underbrace{\{C_1'(x) + C_2'(x)x\} e^{-x}}_{0 \text{ とする}} - \{C_1(x) + C_2(x)x\} e^{-x} + C_2(x) e^{-x} \\ &= \{C_2(x) - C_2(x)x - C_1(x)\} e^{-x} \\ y'' &= \{C_2'(x) - C_2'(x)x - C_2(x) - C_1'(x)\} e^{-x} - \{C_2(x) - C_2(x)x - C_1(x)\} e^{-x} \\ &= \{C_2(x) + C_1(x) + C_2(x)\} e^{-x} \end{aligned}$$

これらを微分方程式に代入して整理すると

$$\{-C_1'(x) + C_2'(x) - C_2(x)x\} e^{-x} = x^2$$

また、

$$\{C_1'(x) + C_2'(x)x\} e^{-x} = 0$$

以上 2 式より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} C_1'(x) = -x^3 e^x \\ C_2'(x) = x^2 e^x \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} C_1(x) = (-x^3 + 3x^2 - 6x + 6) e^x + C_3 \\ C_2(x) = (x^2 - 2x + 2) e^x + C_4 \end{cases} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= \{C_1(x) + C_2(x)x\} e^{-x} \\ &= (C_3 + C_4 x) e^{-x} + (x^2 - 4x + 6) \end{aligned}$$

(未定係数法)

 $y = ax^2 + bx + c$ とおくと $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$

これらを微分方程式に代入して係数を比較する。

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases}$$

よって特解は $y = x^2 - 4x + 6$ である。

齊次方程式の一般解が

 $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$ なので、

求める一般解は

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + x^2 - 4x + 6$$

※齊次方程式の一般解を求める方法は

定数変化法と同じなので省略

問題 4(1) $y'' + y = \sec x$ $y'' + y = 0$ の一般解は

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

 $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$ とおくと

$$\begin{aligned} y' &= \underbrace{C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x}_{0 \text{ とする}} - C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x \\ &= -C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x \\ y'' &= -C_1'(x) \cos x - C_2'(x) \sin x - C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x \end{aligned}$$

これらを微分方程式に代入して整理すると

$$-C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \sec x$$

また

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0$$

以上 2 式より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} C_1'(x) = -\tan x \\ C_2'(x) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} C_1(x) = \log |\cos x| + C_3 \\ C_2(x) = x + C_4 \end{cases} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x \\ &= (\log |\cos x| + C_3) \cos x + (x + C_4) \sin x \end{aligned}$$

(2) $2y'' - 3y' + y = (x^2 + 1) e^x$ $2y'' - 3y' + y = 0$ の一般解は

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^x$$

$y = C_1(x) e^{\frac{1}{2}x} + C_2(x) e^x$ とおくと

$$\begin{aligned} y' &= \underbrace{C_1'(x) e^{\frac{1}{2}x} + C_2'(x) e^x}_{0 \text{ とする}} + \\ &\quad \frac{1}{2} C_1(x) e^{\frac{1}{2}x} + C_2(x) e^x \\ y'' &= \frac{1}{2} C_1'(x) e^{\frac{1}{2}x} + C_2'(x) e^x + \\ &\quad \frac{1}{4} C_1(x) e^{\frac{1}{2}x} + C_2(x) e^x \end{aligned}$$

これらを微分方程式に代入して整理すると

$$C_1'(x) e^{\frac{1}{2}x} + 2C_2'(x) e^x = (x^2 + 1) e^x$$

また

$$C_1'(x) e^{\frac{1}{2}x} + C_2'(x) e^x = 0$$

以上 2 式より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} C_1'(x) = -(x^2 + 1) e^{\frac{1}{2}x} \\ C_2'(x) = x^2 + 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} C_1(x) = (-2x^2 + 8x - 18) e^{\frac{1}{2}x} \\ C_2(x) = \frac{1}{3} x^3 + x \end{cases} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= C_1(x) e^{\frac{1}{2}x} + C_2(x) e^x \\ &= \left\{ (-2x^2 + 8x - 18) e^{\frac{1}{2}x} + C_3 \right\} e^{\frac{1}{2}x} + \\ &\quad \left(\frac{1}{3} x^3 + x + C_4 \right) e^x \\ &= \left(\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 9x + C_4 \right) e^x + C_3 e^{\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

$$(3) \quad y''' - y'' + 2y = -4e^x \cos x + 2e^x \sin x$$

$y''' - y'' + 2y = 0$ の一般解は

$$y = C_1 e^{-x} + e^x (C_2 \cos x + C_3 \sin x)$$

$y = x e^x (\alpha \cos x + \beta \sin x)$ とおく。

※ 齊次方程式に $y = e^{ax}$ を代入して求めた

a の 1 つ $(1 + i)$ が

$e^{\lambda t} \cos vt, e^{\lambda t} \sin vt$ の $\lambda + vi$ と

一致するため、 x 倍されている

$$\begin{aligned} y' &= \dots \\ &= e^x \{ (\alpha x + \alpha + \beta x) \cos x + \\ &\quad (\beta x + \beta - \alpha x) \sin x \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \dots \\ &= e^x \{ (2\beta + 2\alpha + 2\beta) \cos x + \\ &\quad (-2\alpha + 2\beta - 2\alpha) \sin x \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''' &= \dots \\ &= e^x \{ 2(\beta x - \alpha x + 4\beta) \cos x + \\ &\quad 2(\beta x + \alpha x + 4\alpha) \sin x \} \end{aligned}$$

$$y''' - y'' + 2y = \dots$$

$$= e^x \{ 2(3\beta - \alpha) \cos x - 2(\beta - 3\alpha) \sin x \}$$

係数を比較すると

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2(3\beta - \alpha) = -4 \\ -2(\beta - 3\alpha) = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \alpha = \frac{1}{8} \\ \beta = -\frac{5}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-x} + e^x (C_2 \cos x + C_3 \sin x) + \\ &\quad \frac{1}{8} x e^x (\cos x - 5 \sin x) \end{aligned}$$

$$(4) \quad y'' - 2y' + y = x + \sin x$$

$y'' - 2y' + y = 0$ の一般解は

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

$y = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x$ とおくと

$$\begin{aligned} y' &= \underbrace{C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x}_{0 \text{ とする}} + \\ &\quad C_1(x) e^x + C_2(x) (e^x + x e^x) \\ y'' &= C_1'(x) e^x + C_2'(x) (e^x + x e^x) + \\ &\quad C_1(x) e^x + C_2(x) (2e^x + x e^x) \end{aligned}$$

これらを微分方程式に代入して整理すると

$$C_1'(x) e^x + C_2'(x) (e^x + x e^x) = x + \sin x$$

また

$$C_1'(x) e^{\frac{1}{2}x} + C_2'(x) e^x = 0$$

以上 2 式より

$$\begin{cases} C_1'(x) = -xe^{-x}(x + \sin x) \\ C_2'(x) = e^{-x}(x + \sin x) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = e^{-x} \left(x^2 + 2x + 2 + \frac{1}{2} x \sin x + \right. \\ \qquad \qquad \left. \frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{2} \cos x \right) + C_3 \\ C_2(x) = -e^{-x} \left(x + 1 + \frac{1}{2} \sin x + \right. \\ \qquad \qquad \left. \frac{1}{2} \cos x \right) + C_4 \end{cases}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x \\ &= (C_3 + C_4x)e^x + \left(x + 2 + \frac{1}{2} \cos x \right) \end{aligned}$$

(別解 1)

$y'' - 2y' + y = x$ の特解を y_1 、

$y'' - 2y' + y = \sin x$ の特解を y_2 とすると

求める解は

$$y = (C_1 + C_2x) + y_1 + y_2$$

である、ということを利用する。

前者は $y_1 = ax + b$ 、

後者は $y_2 = a \sin x + b \cos x$ とおくことで

特解を求めることができる。

(別解 2)

演算子法。(第 5 回を参照)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(D-1)^2} x + \frac{D^2 + 2D + 1}{(D^2 + 1)^2 - 4D^2} \sin x \\ &= \dots \end{aligned}$$