数学及力学演習 L 第 4 回 (11/5) 解答

問題 1

$y = e^{ax}$ とおく。

(1) $3y'' + 7y' + 2y = 0$

$\Leftrightarrow 3a^2e^{ax} + 7ae^{ax} + 2e^{ex} = 0$

$\Leftrightarrow 3a^2 + 7a + 2 = 0$

$\Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{3}\,,\,-2$

よって

$$y = C_1e^{-\frac{1}{3}x} + C_2e^{-2x}$$

(2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$\Leftrightarrow a^2e^{ax} + 4ae^{ax} + 4e^{ax} = 0$

$\Leftrightarrow (a+2)^2$

$\Leftrightarrow a = -2$ (重解)

$y = xe^{-2x}$ を代入すると

$\left(-2e^{-2x} - 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}\right) +$

$4\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) + 4xe^{-2x} = 0$

となってこれも解。

よって

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} \\ &= e^{-2x}\left(C_1 + C_2x\right) \end{aligned}$$

(3) $y'''' - 16y = 0$

$\Leftrightarrow a^4e^{ax} - 16e^{ax} = 0$

$\Leftrightarrow \left(a^2-4\right)\left(a^2+4\right) = 0$

$\Leftrightarrow a = \pm 2\,,\,\pm 2i$

よって

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{2ix} + C_4e^{-2ix} \\ &= C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3'\cos 2x + C_4'\sin 2x \end{aligned}$$

(どちらの表現も可)

問題 2

※ グラフは問題用紙の裏を参照してください。

(1) $(h = 0)$

$$m\frac{d^2}{dt^2}y\left(t\right) + ky\left(t\right) = 0$$

$y\left(t\right) = e^{ax}$ とおいて代入すると

$$a = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$$

一般解は

$$y\left(t\right) = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

また

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y\left(t\right) = &-C_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \\ &C_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \end{aligned}$$

初期条件より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y\left(0\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}y\left(0\right) = v_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2\sqrt{\dfrac{k}{m}} = v_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{cases} \end{aligned}$$

したがって、このときの運動状態を表す式は

$$y\left(t\right) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(2) $\left(h^2 < 4km\right)$

$$m\frac{d^2}{dt^2}y\left(t\right) + h\frac{d}{dt}y\left(t\right) + ky\left(t\right) = 0$$

$y\left(t\right) = e^{ax}$ とおいて代入すると

$$\begin{aligned} a &= -\frac{h}{2m} \pm \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m}\,i \\ &\equiv -\gamma \pm \omega i \end{aligned}$$

一般解は

$$y\left(t\right) = e^{-\gamma t}\left(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\right)$$

また

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y\left(t\right) = &-\gamma e^{-\gamma t}\left(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\right) \\ &\omega e^{-\gamma t}\left(-C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t\right) \end{aligned}$$

初期条件より

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dfrac{d}{dt} y(0) = v_0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1\gamma + C_2\,\omega = v_0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \dfrac{v_0}{\omega} \end{cases}
\end{aligned}$$

したがって、このときの運動状態を表す式は

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{v_0}{\omega}\, e^{-\gamma t} \sin \omega t \\
&= \frac{2mv_0}{\sqrt{4km - h^2}} e^{-\frac{h}{2m}} \sin \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m}\, t
\end{aligned}$$

(3) $\left(h^2 > 4km\right)$

$$m\frac{d^2}{dt^2} y(t) + h\frac{d}{dt} y(t) + ky(t) = 0$$

$y(t) = e^{ax}$ とおいて代入すると

$$\begin{aligned}
a &= \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4km}}{2m} \\
&\equiv \lambda_{\pm}
\end{aligned}$$

一般解は

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}$$

また

$$\frac{d}{dt} y(t) = C_1\lambda_+ e^{\lambda_+ t} + C_2\lambda_- e^{\lambda_- t}$$

初期条件より

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dfrac{d}{dt} y(0) = v_0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\lambda_+ + C_2\lambda_- = v_0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} C_1 = \dfrac{v_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \\ C_2 = \dfrac{v_0}{\lambda_- - \lambda_+} \end{cases}
\end{aligned}$$

したがって、このときの運動状態を表す式は

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{v_0}{\lambda_+ - \lambda_-} e^{\lambda_+ t} + \frac{v_0}{\lambda_- - \lambda_+} e^{\lambda_- t} \\
&= \frac{mv_0}{\sqrt{h^2 - 4km}} \left(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}\right)
\end{aligned}$$

(4) $\left(h^2 = 4km\right)$

$$m\frac{d^2}{dt^2} y(t) + h\frac{d}{dt} y(t) + ky(t) = 0$$

$y(t) = e^{ax}$ とおいて代入すると

$$a = -\frac{h}{2m}$$

一般解は

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{h}{2m}t} + C_2 t e^{-\frac{h}{2m}t}$$

また

$$\frac{d}{dt} y(t) = -C_1\frac{h}{2m} e^{-\frac{h}{2m}t} + C_2\left(1 - \frac{h}{2m}t\right) e^{-\frac{h}{2m}t}$$

初期条件より

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dfrac{d}{dt} y(0) = v_0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1\dfrac{h}{2m} + C_2 = v_0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = v_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

したがって、このときの運動状態を表す式は

$$y(t) = v_0 t e^{-\frac{h}{2m}t}$$

問題 **3**　$y'' + 2y' + y = 0$

(定数変化法)

斉次方程式の一般解を求める。

$y = e^{ax}$ とおいて代入すると $a = -1$ (重解)

よって

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \\ &= (C_1 + C_2 x)\, e^{-x} \end{aligned}$$

いま $y = \{C_1(x) + C_2(x)\, x\}\, e^{-x}$ とおくと

$$\begin{aligned} y' = & \underbrace{\{C_1'(x) + C_2'(x)\, x\}\, e^{-x}}_{0 \text{ とする}} - \\ & \{C_1(x) + C_2(x)\, x\}\, e^{-x} + C_2(x)\, e^{-x} \\ = & \{C_2(x) - C_2(x)\, x - C_1(x)\}\, e^{-x} \\ y'' = & \{C_2'(x) - C_2'(x)\, x - C_2(x) - C_1'(x)\}\, e^{-x} - \\ & \{C_2(x) - C_2(x)\, x - C_1(x)\}\, e^{-x} \\ = & \{C_2(x) + C_1(x) + C_2(x)\}\, e^{-x} \end{aligned}$$

これらを微分方程式に代入して整理すると

$$\{-C_1'(x) + C_2'(x) - C_2(x)\, x\}\, e^{-x} = x^2$$

また、

$$\{C_1'(x) + C_2'(x)\, x\}\, e^{-x} = 0$$

以上 2 式より

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -x^3 e^x \\ C_2'(x) = x^2 e^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = \left(-x^3 + 3x^2 - 6x + 6\right) e^x + C_3 \\ C_2(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x + C_4 \end{cases}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= \{C_1(x) + C_2(x)\, x\}\, e^{-x} \\ &= (C_3 + C_4 x)\, e^{-x} + \left(x^2 - 4x + 6\right) \end{aligned}$$

(未定係数法)

$y = ax^2 + bx + c$ とおくと

$y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$

これらを微分方程式に代入して係数を比較する。

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases}$$

よって特解は $y = x^2 - 4x + 6$ である。

斉次方程式の一般解が

$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x}$ なので、

求める一般解は

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x} + x^2 - 4x + 6$$

※ 斉次方程式の一般解を求める方法は

定数変化法と同じなので省略

問題 **4**

(1)　$y'' + y = \sec x$

$y'' + y = 0$ の一般解は

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$ とおくと

$$\begin{aligned} y' = & \underbrace{C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x}_{0 \text{ とする}} - C_1(x) \sin x + C_2 \cos x \\ = & -C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x \\ y'' = & -C_1(x) \cos x - C_2(x) \sin x - \\ & C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x \end{aligned}$$

これらを微分方程式に代入して整理すると

$$-C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \sec x$$

また

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0$$

以上 2 式より

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\tan x \\ C_2'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = \log|\cos x| + C_3 \\ C_2(x) = x + C_4 \end{cases}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x \\ &= (\log|\cos x| + C_3) \cos x + (x + C_4) \sin x \end{aligned}$$

(2)　$2y'' - 3y' + y = \left(x^2 + 1\right) e^x$

$2y'' - 3y' + y = 0$ の一般解は

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^x$$

$y = C_1(x)\,e^{\frac{1}{2}x} + C_2(x)\,e^x$ とおくと

$$y' = \underbrace{C_1'(x)\,e^{\frac{1}{2}x} + C_2'(x)\,e^x}_{0\text{ とする}} + \frac{1}{2}C_1(x)\,e^{\frac{1}{2}x} + C_2(x)\,e^x$$

$$y'' = \frac{1}{2}C_1'(x)\,e^{\frac{1}{2}x} + C_2'(x)\,e^x + \frac{1}{4}C_1(x)\,e^{\frac{1}{2}x} + C_2(x)\,e^x$$

これらを微分方程式に代入して整理すると

$$C_1'(x)\,e^{\frac{1}{2}x} + 2C_2'(x)\,e^x = \left(x^2+1\right)e^x$$

また

$$C_1'(x)\,e^{\frac{1}{2}x} + C_2'(x)\,e^x = 0$$

以上 2 式より

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\left(x^2+1\right)e^{\frac{1}{2}x} \\ C_2'(x) = x^2+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = \left(-2x^2+8x-18\right)e^{\frac{1}{2}x} \\ C_2(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x \end{cases}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= C_1(x)\,e^{\frac{1}{2}x} + C_2(x)\,e^x \\ &= \left\{\left(-2x^2+8x-18\right)e^{\frac{1}{2}x} + C_3\right\}e^{\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{3}x^3 + x + C_4\right)e^x \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + C_4\right)e^x + C_3 e^{\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

(3) $y''' - y'' + 2y = -4e^x\cos x + 2e^x\sin x$

$y''' - y'' + 2y = 0$ の一般解は

$$y = C_1 e^{-x} + e^x\left(C_2\cos x + C_3\sin x\right)$$

$y = xe^x\left(\alpha\cos x + \beta\sin x\right)$ とおく。

※ 斉次方程式に $y = e^{ax}$ を代入して求めた a の 1 つ ($1+i$) が $e^{\lambda t}\cos vt$, $e^{\lambda t}\sin vt$ の $\lambda + vi$ と一致するため、x 倍されている

$$\begin{aligned} y' &= \cdots \\ &= e^x\left\{(\alpha x + \alpha + \beta x)\cos x + (\beta x + \beta - \alpha x)\sin x\right\} \\ y'' &= \cdots \\ &= e^x\left\{(2\beta + 2\alpha + 2\beta)\cos x + (-2\alpha + 2\beta - 2\alpha)\sin x\right\} \\ y''' &= \cdots \\ &= e^x\left\{2(\beta x - \alpha x + 4\beta)\cos x + 2(\beta x + \alpha x + 4\alpha)\sin x\right\} \\ y''' - y'' + 2y &= \cdots \\ &= e^x\left\{2(3\beta - \alpha)\cos x - 2(\beta - 3\alpha)\sin x\right\} \end{aligned}$$

係数を比較すると

$$\begin{cases} 2(3\beta - \alpha) = -4 \\ -2(\beta - 3\alpha) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{8} \\ \beta = -\dfrac{5}{8} \end{cases}$$

したがって

$$y = C_1 e^{-x} + e^x\left(C_2\cos x + C_3\sin x\right) + \frac{1}{8}xe^x\left(\cos x - 5\sin x\right)$$

(4) $y'' - 2y' + y = x + \sin x$

$y'' - 2y' + y = 0$ の一般解は

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

$y = C_1(x)\,e^x + C_2(x)\,xe^x$ とおくと

$$y' = \underbrace{C_1'(x)\,e^x + C_2'(x)\,xe^x}_{0\text{ とする}} + C_1(x)\,e^x + C_2(x)\left(e^x + xe^x\right)$$

$$y'' = C_1'(x)\,e^x + C_2'(x)\left(e^x + xe^x\right) + C_1(x)\,e^x + C_2(x)\left(2e^x + xe^x\right)$$

これらを微分方程式に代入して整理すると

$$C_1'(x)\,e^x + C_2'(x)\left(e^x + xe^x\right) = x + \sin x$$

また

$$C_1'(x)\,e^{\frac{1}{2}x} + C_2'(x)\,e^x = 0$$

以上 2 式より

$$\begin{cases} C_1'(x) = -xe^{-x}(x+\sin x) \\ C_2'(x) = e^{-x}(x+\sin x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = e^{-x}\left(x^2+2x+2+\dfrac{1}{2}x\sin x+ \right. \\ \qquad\qquad \left. \dfrac{1}{2}x\cos x+\dfrac{1}{2}\cos x\right)+C_3 \\ C_2(x) = -e^{-x}\left(x+1+\dfrac{1}{2}\sin x+ \right. \\ \qquad\qquad \left. \dfrac{1}{2}\cos x\right)+C_4 \end{cases}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x \\ &= (C_3+C_4x)e^x + \left(x+2+\frac{1}{2}\cos x\right) \end{aligned}$$

(別解 1)

$y''-2y'+y=x$ の特解を y_1、

$y''-2y'+y=\sin x$ の特解を y_2 とすると

求める解は

$$y = (C_1+C_2x)+y_1+y_2$$

である、ということを利用する。

前者は $y_1 = ax+b$、

後者は $y_2 = a\sin x + b\cos x$ とおくことで

特解を求めることができる。

(別解 2)

演算子法。(第 5 回を参照)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(D-1)^2}x + \frac{D^2+2D+1}{(D^2+1)^2-4D^2}\sin x \\ &= \dots \end{aligned}$$