数学及力学演習 L 第 5 回（11/12） 解答

問題 1

(1) 数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&(D-\alpha)\left\{e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx\right\}\\
&=\alpha e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx+R(x)-\\
&\quad\alpha e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx\\
&=R(x)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{D-\alpha}R(x)\\
&=e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx
\end{aligned}
$$

(ii) $n=k$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(D-\alpha)^k}R(x)\\
&=e^{\alpha x}\int\cdots\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx\ldots dx
\end{aligned}
$$

が正しいと仮定する。
$n=k+1$ のときを考えると

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(D-\alpha)^{k+1}}R(x)\\
&=\frac{1}{D-\alpha}\frac{1}{(D-\alpha)^k}R(x)\\
&=\frac{1}{D-\alpha}\left\{e^{\alpha x}\int\cdots\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx\ldots dx\right\}\\
&\quad\text{（↑仮定より）}\\
&=e^{\alpha x}\times\\
&\quad\int e^{-\alpha x}\left\{e^{\alpha x}\int\cdots\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx\ldots dx\right\}dx\\
&\quad\text{（↑ $n=1$ の場合の式より）}\\
&=e^{\alpha x}\iint\ldots\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx\,dx\ldots dx
\end{aligned}
$$

したがって、全ての n に対して成り立つ。

(2) 同じく数学的帰納法。

(i) $n=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{D-\alpha}e^{\alpha x} &= e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}e^{\alpha x}\,dx\\
&= e^{\alpha x}\cdot x\\
&= xe^{\alpha x}
\end{aligned}
$$

(ii) $n=k$ のとき

$$
\frac{1}{(D-\alpha)^k}e^{\alpha x}=\frac{x^k}{k!}e^{\alpha x}
$$

が正しいと仮定する。
$n=k+1$ のときを考えると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(D-\alpha)^{k+1}}e^{\alpha x} &= \frac{1}{D-\alpha}\left(\frac{x^k}{k!}e^{\alpha x}\right)\\
&\quad\text{（↑仮定より）}\\
&=e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}\cdot\frac{x^k}{k!}e^{\alpha x}\,dx\\
&\quad\text{（↑ (1) の $n=1$ の場合の式より）}\\
&=\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{\alpha x}
\end{aligned}
$$

したがって、全ての n に対して成り立つ。

(3) $f(D)\,e^{\alpha x}=f(\alpha)\,e^{\alpha x}$
であるから

$$
\frac{1}{f(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{f(\alpha)}e^{\alpha x}
$$

(4) 根気強く計算するしかないです。

$$
\begin{aligned}
&\left(D^2+a^2\right)\left\{\frac{1}{2a}x\sin(ax+b)\right\}\\
&=\frac{1}{2a}\left[D\left\{\sin(ax+b)+ax\cos(ax+b)\right\}+\right.\\
&\quad\left.a^2x\sin(ax+b)\right]\\
&=\frac{1}{2a}\left\{a\cos(ax+b)+a\cos(ax+b)-\right.\\
&\quad\left.a^2x\sin(ax+b)+a^2x\sin(ax+b)\right\}\\
&=\cos(ax+b)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{1}{D^2+a^2}\cos(ax+b)=\frac{1}{2a}x\sin(ax+b)
$$

$$\left(D^2+a^2\right)\left\{\frac{1}{2a}x\cos(ax+b)\right\}$$
$$= \frac{1}{2a}\left[D\left\{\cos(ax+b)-ax\sin(ax+b)\right\}+ a^2x\cos(ax+b)\right]$$
$$= \frac{1}{2a}\left\{-a\sin(ax+b)-a\sin(ax+b)- a^2x\cos(ax+b)+a^2x\cos(ax+b)\right\}$$
$$= -\sin(ax+b)$$

よって

$$\frac{1}{D^2+a^2}\ \sin(ax+b) = -\frac{1}{2a}\ \cos(ax+b)$$

(5) まず、

$$f(D+\alpha)\,e^{-\alpha x}Q(x) = e^{-\alpha x}f(D)\,Q(x)$$

を示す。

$$f(D+\alpha)\,e^{-\alpha x}Q(x)$$
$$= \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i\,(D+\alpha)^i\right\}e^{-\alpha x}Q(x) \quad (*)$$

ここで

$$(D+\alpha)\,e^{-\alpha x}Q(x)$$
$$= \left(-\alpha e^{-\alpha x}+\alpha e^{-\alpha x}\right)Q(x)+e^{-\alpha x}DQ(x)$$
$$= e^{-\alpha x}DQ(x)$$

$$(D+\alpha)^2\,e^{-\alpha x}Q(x)$$
$$= (D+\alpha)\,e^{-\alpha x}DQ(x)$$
$$= \left(-\alpha e^{-\alpha x}+\alpha e^{-\alpha x}\right)DQ(x)+e^{-\alpha x}D^2Q(x)$$
$$= e^{-\alpha x}D^2Q(x)$$

以下 $i=3\,,\,4\,,\ldots$ と繰り返せば、$(*)$ より

$$f(D+\alpha)\,e^{-\alpha x}Q(x)$$
$$= e^{-\alpha x}\left(\sum_{i=0}^{n} a_iD^i\right)Q(x)$$
$$= e^{-\alpha x}f(D)\,Q(x)$$

この結果から

$$f(D+\alpha)\,e^{-\alpha x}\left\{\frac{1}{f(D)}\,e^{\alpha x}R(x)\right\}$$
$$= e^{-\alpha x}f(D)\,\frac{1}{f(D)}\,e^{\alpha x}R(x)$$
$$=R(x)$$

したがって

$$\frac{1}{f(D)}\,e^{\alpha x}R(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{f(D+\alpha)}\,R(x)$$

がいえた。

問題 2

斉次方程式の一般解を求める過程は省略。

(1) $(D-1)(D+2)\,y = x^2+3x$

$$y = \frac{1}{(D-1)(D+2)}\ \left(x^2+3x\right)$$
$$= \frac{1}{D-1}\left\{-\frac{1}{-2}\left(1+\frac{D}{-2}+\frac{D^2}{(-2)^2}\right)\right\}\left(x^2+3x\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{D-1}\left(x^2+2x-1\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{1}\left(1+\frac{D}{1}+\frac{D^2}{1^2}\right)\right\}\left(x^2+2x-1\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x^2+4x+3\right)$$

$$y = C_1e^x + C_2^{-2x} - \frac{1}{2}\left(x^2+4x+3\right)$$

(2) $\left(D^2+4\right)y = xe^{2x}$

$$y = \frac{1}{D^2+4}\,xe^{2x}$$
$$= x\frac{1}{D^2+4}\,e^{2x} - \frac{2D}{\left(D^2+4\right)^2}\,e^{2x}$$
$$= x\frac{1}{8}\,e^{2x} - \frac{1}{16}\,e^{2x}$$
$$= \frac{e^{2x}}{16}\,(2x-1)$$

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{e^{2x}}{16}\ (2x-1)$$

(3) $\left(D^2+1\right)y = \sin x$

$$y = \frac{1}{D^2+1}\ \sin x$$
$$= \frac{x^1}{2^1\cdot 1!}\int \sin x\,dx$$
$$= -\frac{x}{2}\cos x$$

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

(4) $\left(D^2+2D+2\right)y=e^x\cos x$

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{D^2+2D+2}\,e^x\cos x\\&=e^x\frac{1}{(D+1)^2+2(D+1)+2}\,\cos x\\&=e^x\frac{1}{D^2+4D+5}\,\cos x\\&=e^x\frac{\left(D^2+5\right)-4D}{\left(D^2+5\right)^2-16D^2}\,\cos x\\&=\frac{e^x}{32}\left(D^2-4D+5\right)\cos x\\&=\frac{e^x}{8}\left(\cos x+\sin x\right)\end{aligned}$$

$$y=e^{-x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+\frac{e^x}{8}\left(\cos x+\sin x\right)$$

問題 3

$x=e^X$ とおくと、$X=\log x$ で

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{dX}\frac{dX}{dx}\\&=\frac{dy}{dX}\frac{1}{x}\\\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dX}\frac{1}{x}\right)\\&=\frac{d^2y}{dX^2}\frac{dX}{dx}\frac{1}{x}+\frac{dy}{dX}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=\frac{d^2y}{dX^2}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dX}\\&=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dX^2}-\frac{dy}{dX}\right)\end{aligned}$$

問題 2 と同様、

斉次方程式の一般解を求める過程は省略。

(1) $x^2y''-4xy'+6y=0$

$\Leftrightarrow (y''-y')-4y'+6y=0$

(↑「$'$」は X での微分)

$\Leftrightarrow y''-5y'+6y=0$

これを解いて

$$\begin{aligned}y&=C_1e^{2X}+C_2e^{3X}\\&=C_1x^2+C_2x^3\end{aligned}$$

(2) $x^2y''-xy'+y=\log x$

$\Leftrightarrow y''-2y'+y=X$

$\Leftrightarrow (D-1)^2y=X$

特解 y_s を求める。

$$\begin{aligned}y_s&=\frac{1}{(D-1)^2}\,X\\&=\frac{1}{D-1}\left\{-\frac{1}{1}\left(1+\frac{D}{1}\right)\right\}X\\&=-\frac{1}{D-1}\left(X+1\right)\\&=-\left\{-\frac{1}{1}\left(1+\frac{D}{1}\right)\right\}(X+1)\\&=X+2\end{aligned}$$

よって一般解は

$$\begin{aligned}y&=C_1e^X+C_2Xe^X+X+2\\&=C_1x+C_2x\log x+\log x+2\end{aligned}$$

(3) $x^2y''+5xy'+4y=x^3$

$\Leftrightarrow y''+4y'+4y=e^{3X}$

$\Leftrightarrow (D+2)^2y=e^{3X}$

特解 y_s を求める。

$$\begin{aligned}y_s&=\frac{1}{(D+2)^2}\,e^{3X}\\&=\frac{1}{25}\,e^{3X}\end{aligned}$$

よって一般解は

$$\begin{aligned}y&=C_1e^{-2X}+C_2Xe^{-2X}+\frac{1}{25}\,e^{3X}\\&=C_1\frac{1}{x^2}+C_2\frac{\log x}{x^2}+\frac{1}{25}\,x^3\end{aligned}$$

(4) $x^2y''-xy'+2y=x$

$\Leftrightarrow y''-2y'+2y=e^X$

$\Leftrightarrow \left(D^2-2D+2\right)y=e^X$

特解 y_s を求める。

$$\begin{aligned}y_s&=\frac{1}{D^2-2D+2}\,e^X\\&=e^X\end{aligned}$$

よって一般解は

$$\begin{aligned}y&=e^X\left(C_1\cos X+C_2\sin X\right)+e^X\\&=x\left\{C_1\cos(\log x)+C_2\sin(\log x)\right\}+x\end{aligned}$$

問題 4

(1) 1 階微分、2 階微分をそれぞれ求める。

$$y' = c'(x)\cos x\, e^x + c(x)(-\sin x + \cos x)e^x$$
$$y'' = c''(x)\cos x\, e^x + c'(x)(-\sin x + \cos x)e^x + c'(x)(-\sin x + \cos x)e^x - 2c(x)\sin x\, e^x$$

これらを微分方程式に代入して整理すると

$$e^x \frac{d^2}{dx^2} c(x) + 2e^x \frac{d}{dx} c(x) = 4\cos x$$

を得る。

(2) $\frac{d^2}{dx^2} c(x) = \frac{d}{dx} v(x)$ であるから、

$$e^x \frac{d}{dx} v(x) + 2e^x v(x) = 4\cos x$$

(3) $e^x \frac{d}{dx} v(x) + 2e^x v(x) = 4\cos x$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} v(x) + 2v(x) = 4e^{-x}\cos x$

$\Leftrightarrow (D+2)\, v(x) = 4e^{-x}\cos x$

特解 $v_s(x)$ を求める。

$$\begin{aligned} v_s(x) &= \frac{4}{D+2}\, e^{-x}\cos x \\ &= e^{-x}\frac{4}{(D-1)+2}\cos x \\ &= 4e^{-x}\frac{1}{D+1}\cos x \\ &= 4e^{-x}\frac{D-1}{D^2-1}\cos x \\ &= -2e^{-x}(D-1)\cos x \\ &= 2e^{-x}(\cos x + \sin x) \end{aligned}$$

よって一般解は

$$v(x) = 2e^{-x}(\cos x + \sin x) + C_1 e^{-2x}$$

(4) $c(x)$ を求める。

$\frac{d}{dx} c(x) = 2e^{-x}(\cos x + \sin x) + C_1 e^{-2x}$ より

$$\begin{aligned} c(x) &= 2\left(-e^{-x}\cos x\right) - \frac{C_1}{2}e^{-2x} + C_2 \\ &= -2e^{-x}\cos x - \frac{C_1}{2}e^{-2x} + C_2 \end{aligned}$$

したがって、一般解は

$$\begin{aligned} y &= \left(-2e^{-x}\cos x - \frac{C_1}{2}e^{-2x} + C_2\right)\cos x\, e^x \\ &= -2\cos^2 x - \frac{C_1}{2}e^{-x}\cos x + C_2 e^x \cos x \end{aligned}$$