数学及力学演習 L 第 6 回（11/26） 解答

問題 1

$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ とおく。

(1) $y' = 2y$ を解く。

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

次数ごとに x の係数を比較すると

$x^0 : 1a_1 = 2a_0$

$x^1 : 2a_2 = 2a_1 \ldots$

$x^k : (k+1)a_{k+1} = 2a_k$

$a_0 = 1$ とすると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2}{k+1}a_k = \frac{2}{k+1}\frac{2}{k}a_{k-1} = \ldots \\ &= \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}(\times a_0) \end{aligned}$$

よって、一般解は $y = C_1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!} + y_s$

(y_s は特解)

一般解が求まったので、y_s を求める。

次数ごとに x の係数を比較すると

$x^0 : 1a_1 = 2a_0 + 1$

$x^1 : 2a_2 = 2a_1 + 1$

$x^2 : 3a_3 = 2a_2 \ldots$

$x^k : (k+1)a_{k+1} = 2a_k$

$a_0 = 1$ とすると、$a_1 = 3\,,\, a_2 = \frac{7}{2}\,, \ldots$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2\times 1}{(k+1)!}\frac{2^{k-1}}{1} \times a_2 \\ &= \frac{7\cdot 2^{k-1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

よって、特解は $y_s = 1 + 3x + \sum_{k=2}^{n} \frac{7\cdot 2^{k-2}}{k!}x^k$

これを上記一般解の y_s に代入。

(2) $y' = \frac{y}{x}$ を解く。

$x^0 : 1a_1 = a_1 \Leftrightarrow a_1$ は任意

$x^1 : 2a_2 = a_2 \ldots$

$x^k : ka_k = a_k$

(つまり、$2 \leq i \leq k$ で $a_i = 0$)

よって、一般解は $y = C_1 x + y_s$

(注：C_1 には a_1 も含まれている)

一般解が求まったので、

$y' = \frac{y}{x} + x$ の特解を求める。

次数ごとに x の係数を比較すると

$x^0 : 1a_1 = a_1 \Leftrightarrow a_1$ は任意（1 とする）

$x^1 : 2a_2 = a_2 + 1 \Leftrightarrow a_2 = 1$

$x^2 : 3a_3 = a_3 \ldots$

$x^k : ka_k = a_k$

(つまり、$3 \leq i \leq k$ で $a_i = 0$)

よって、特解は $y_s = x + x^2$

これを上記一般解の y_s に代入。

(3) $(x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ より、

$(x^2-1)\sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i x^{i-2} + 2x\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} -$

$2\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}(i-1)(i+2)a_i x^i - \sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i x^{i-2} = 0$

次数ごとに x の係数を比較すると

$x^0 : (-1)\times 2 \times a_0 - 2\times 1\times a_2 = 0$

$x^1 : 0\times 3\times a_1 - 3\times 2\times a_3 = 0 \Leftrightarrow a_3 = 0 \ \ldots$

$x^k : (k-1)(k+2)a_k - (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$

$\Leftrightarrow a_{k+2} = \frac{k-1}{k+1}a_k \ (k+2 \neq 0)$

ここで

$a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = 0 \Rightarrow \ldots$ から

$a_{2m+1} = 0\,(m = 1, 2, \ldots)$

○ $a_0 = 0\,,\, a_1 = 1$ のとき

$a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \Rightarrow \ldots$ から

$a_{2m} = 0\,(m = 1, 2, \ldots)$

よって、このときの特解は $y_1 = x$

○ $a_0 = 1\,,\, a_1 = 0$ のとき

$k = 2m$ とすると、まず $a_2 = -1$ で

$$\begin{aligned} a_{2(m+1)} &= \frac{2m-1}{2m+1}a_{2m} = \frac{2m-1}{2m+1}\frac{2m-3}{2m-1}a_{2(m-1)} \\ &= \ldots = \frac{1}{2m+1}a_2 \\ &= -\frac{1}{2m+1} \end{aligned}$$

よって、このときの特解は

$$y_2 = 1 - x^2 - \sum_{m=2}^{n} \frac{x^{2m}}{2m+1}$$

一般解は、これら 2 つの特解の線形結合であり

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

(4) $y'' + x^2 y' + 3xy = 0$ より、

$$\sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i x^{i-2} + x^2 \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} +$$

$$3x \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i x^{i-2} + \sum_{i=0}^{n} (i+3)a_i x^{i+1} = 0$$

次数ごとに x の係数を比較すると

$x^0 : 2 \times 1 \times a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$x^1 : 3 \times 2 \times a_3 + 3 \times a_0 = 0$

$x^2 : 4 \times 3 \times a_4 + 4 \times a_1 = 0 \ldots$

$x^k : (k+2)(k+1)a_{k+2} + (k+2)a_{k-1} = 0 \Leftrightarrow$

$a_{k+2} = -\dfrac{1}{k+1} a_{k-1}$

ここで

$a_2 = 0 \Rightarrow a_5 = 0 \Rightarrow \ldots$ から

$a_{3m+2} = 0 \, (m = 1, 2, \ldots)$

○ $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ のとき

$a_{3m} = 0$

$$a_{3m+1} = -\frac{1}{3m} a_{3(m-1)+1} = \ldots = \prod_{i=1}^{m} \left(-\frac{1}{3i} \right) a_1$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} (-3i)}$$

よって、このときの特解は

$$y_1 = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} (-3i)} x^{3m+1} + x$$

○ $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ のとき

$a_{3m+1} = 0$

$$a_{3m} = -\frac{1}{3m-1} a_{3(m-1)} = \ldots$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \left(-\frac{1}{3i-1} \right) a_0 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} \{-(3i-1)\}}$$

よって、このときの特解は

$$y_2 = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} \{-(3i-1)\}} x^{3m} + 1$$

一般解は、これら 2 つの特解の線形結合であり

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

問題 2

(1) $x_{k+1} = 0.6x_k + 0.2y_k$

$y_{k+1} = 0.4x_k + 0.8y_k$

より、

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

(2) $A = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

固有値を λ、固有ベクトルを $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = O$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5, 2$$

○ $\lambda = 5$ のとき

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

○ $\lambda = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって、

$$5A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{3} \right) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \ldots = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \times$$
$$\left(-\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\ 2 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

したがって、
（ジョギング人口）:（非ジョギング人口）$= 1 : 2$
となる。

問題 3

$X = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$ とおくと、$\dot{X} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$

(1) $\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \lambda+4 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda+1 & 1 \\ -4 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = O$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+4 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda+1 & 1 \\ -4 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1, -2$$

（ただし -2 は重解）

○ $\lambda = -1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

○ $\lambda = -2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

（うち 1 本は非独立）
よって、

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} +$$
$$C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

（他の 3 本を使っても同様に書ける）

(2) $\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = O$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

（ただし 2 は 3 重解）

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow$$

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$（縮退している）

ジョルダン分解を考える。

$AP_2 = \lambda P_2 + P_1 \Leftrightarrow (A - \lambda E) P_2 = P_1$ より

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$（$v_1$ は任意）

$AP_3 = \lambda P_3 + P_2 \Leftrightarrow (A - \lambda E) P_3 = P_2$ より

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{（}v_1\text{ は任意）}$$

よって、

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} +$$

$$C_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \right\} +$$

$$C_3 \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right\}$$

問題 4

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ とすると、

$|\lambda E - A| = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$

$D = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$

判別式が 0 以上なので、固有値は実数となる。

(2) 固有値（実数）を λ_1, λ_2 とする。

○ $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき

$D = 0$

$\Leftrightarrow (a-d)^2 + 4b^2 = 0$

$\Leftrightarrow a = d$ かつ $b = 0$

よって

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aE \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

として分解することができる。

○ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき

固有値が実数なので、固有値分解できる。

(3) A の固有値が正 $\Leftrightarrow -A$ の固有値が負

$-A$ の固有値を $\lambda_1 < 0\,,\, \lambda_2 < 0$ とすると

$\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} \\ \gamma e^{\lambda_1 t} + \delta e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$, ただし

$\boldsymbol{u}(0) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \gamma + \delta \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{u}(t)\| - \|\boldsymbol{a}\| \\ &= \|\boldsymbol{u}(t)\| - \|\boldsymbol{u}(0)\| \\ &= \sqrt{\left(\alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}\right)^2 + \left(\gamma e^{\lambda_1 t} + \delta e^{\lambda_2 t}\right)^2} - \\ &\quad \sqrt{(\alpha+\beta)^2 + (\gamma+\delta)^2} \\ &\leq \sqrt{(\alpha+\beta)^2 + (\gamma+\delta)^2} - \\ &\quad \sqrt{(\alpha+\beta)^2 + (\gamma+\delta)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

（$\lambda_1 < 0\,,\, \lambda_2 < 0 \Rightarrow e^{\lambda_1 t} < 1\,,\, e^{\lambda_2 t} < 1$ に注意）

（厳密な証明）

$-\mathbf{A}$ の固有値を λ とする。

$\lambda^2 + (a+d)\lambda + \left(ad - b^2\right) = 0$ より

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-(a+d) \pm \sqrt{D}}{2}$

$$\begin{aligned} (\lambda E + A) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda + a & b \\ b & \lambda + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ \lambda + a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、

$$\boldsymbol{u}(t) = C_1 \begin{pmatrix} -b \\ \lambda_1 + a \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} -b \\ \lambda_2 + a \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}(t)\|^2 &= b^2 \left(C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}\right)^2 + \\ &\quad \left\{C_1 (\lambda_1 + a) e^{\lambda_1 t} + C_2 (\lambda_2 + a) e^{\lambda_2 t}\right\}^2 \\ &= C_1^2 \left(b^2 + (\lambda_1 + a)^2\right) e^{2\lambda_1 t} + \\ &\quad C_2^2 \left(b^2 + (\lambda_2 + a)^2\right) e^{2\lambda_2 t} + \\ &\quad C_1 C_2 \left(2b^2 + 2(\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a)\right) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a) &= \left(\frac{a - d + \sqrt{D}}{2}\right) \left(\frac{a - d - \sqrt{D}}{2}\right) \\ &= \frac{(a-d)^2 - D}{4} \\ &= -b^2 \end{aligned}$$

よって

$$\|\boldsymbol{u}(t)\| = C_1^2 \left(b^2 + (\lambda_1 + a)^2\right) e^{2\lambda_1 t} + C_2^2 \left(b^2 + (\lambda_2 + a)^2\right) e^{2\lambda_2 t}$$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}(0)\| &= \|\boldsymbol{a}\| \\ &= C_1^2 \left(b^2 + (\lambda_1 + a)^2\right) + C_2^2 \left(b^2 + (\lambda_2 + a)^2\right)\end{aligned}$$

$\lambda_1 < 0\,,\ \lambda_2 < 0 \Rightarrow e^{2\lambda_1 t} \leq 1\,,\ e^{2\lambda_2 t} \leq 1$ なので

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 \leq \|\boldsymbol{a}\|^2$$

がいえた。