数学及力学演習 L 第 7 回（12/3） 解答

問題 1

(1) $x(t+\varDelta t) = 5x(t)\varDelta t - y(t)\varDelta t$

$y(t+\varDelta t) = 3y(t)\varDelta t - 2x(t)\varDelta t$

より

$$\frac{dx(t)}{dt} = 5x - y$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 3y - 2x$$

(2) $$\begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$ とおくと

$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = O$ より

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\ &= \lambda^2 - 8\lambda + 13 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda = 4 \pm \sqrt{3}$

○ $\lambda = 4 + \sqrt{3}$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & -1 \\ -2 & -1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

○ $\lambda = 4 - \sqrt{3}$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & -1 \\ -2 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

一般解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{\left(4+\sqrt{3}\right)t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{\left(4-\sqrt{3}\right)t}$$

初期条件 $x(0) = 4$, $y(0) = 4$ より

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{\left(4+\sqrt{3}\right)t} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{\left(4-\sqrt{3}\right)t}$$

t が増加すると、x は増加して y は減少する。$\Leftrightarrow$

絶滅するのは Y

$y = 0$

$\Leftrightarrow -\left(1-\sqrt{3}\right) e^{\left(4+\sqrt{3}\right)t} = \left(1+\sqrt{3}\right) e^{\left(4-\sqrt{3}\right)t}$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \log \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

(3) 初期条件 $x(0) = 2$, $y(0) = 8$ より

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left(1-\sqrt{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{\left(4+\sqrt{3}\right)t} + \left(1+\sqrt{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{\left(4-\sqrt{3}\right)t}$$

t が増加すると、x は減少して y は増加する。$\Leftrightarrow$

絶滅するのは X

$x = 0$

$\Leftrightarrow -\left(1-\sqrt{3}\right) e^{\left(4+\sqrt{3}\right)t} = \left(1+\sqrt{3}\right) e^{\left(4-\sqrt{3}\right)t}$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \log \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

(4) $C_2 \leq 0$ とすると

$C_1 \geq 0 \Rightarrow y \leq 0$

$C_1 < 0 \Rightarrow x < 0$

となるので、$C_2 > 0$ の場合のみを考える。

○ $C_1 > 0$ のとき

$C_1 > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2+\sqrt{3}}{6} x(0) - \dfrac{\sqrt{3}}{3} y(0) > 0$

$\Leftrightarrow 0 < \dfrac{y(0)}{x(0)} < \dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}$

このとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ で、Y が絶滅する。

○ $C_1 = 0$ のとき

$\Leftrightarrow \dfrac{y(0)}{x(0)} = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}$

このとき、X も Y も無尽蔵に増え続ける。

○ $C_1 < 0$ のとき

$\Leftrightarrow \dfrac{y(0)}{x(0)} > \dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}$

このとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ で、X が絶滅する。

問題 2

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$ とおく。

(1) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -4-\lambda & 1 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = O$

より

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -4-\lambda & 1 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda = 1\,,\,2\,,\,-3$

正の固有値があるので不安定。

(2) $\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 3 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = O$

より

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 3 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda = -2\,,\,\pm 2i$

固有値 $\pm 2i$ に対して、固有ベクトルは互いに直交しており、縮退していないので安定。

問題 3

(1) $\begin{cases} a_0 - a_1 x_c + a_2 y_c = 0 \\ b_0 - b_1 y_c + b_2 x_c = 0 \end{cases}$

を解いて

$x_c = \dfrac{a_2 b_0 + a_0 b_1}{a_1 b_1 - a_2 b_2}$

$y_c = \dfrac{a_1 b_0 + a_0 b_2}{a_1 b_1 - a_2 b_2}$

(2) もとの連立微分方程式に代入する。

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= a_0 - a_1\left(\bar{x} - \frac{a_2 b_0 - a_0 b_1}{a_1 b_1 - a_2 b_2}\right) + \\ &\quad a_2\left(\bar{y} - \frac{a_1 b_0 + a_0 b_2}{a_1 b_1 - a_2 b_2}\right) \\ &= a_0 - a_1 \bar{x} + a_2 \bar{y} - a_0 \\ &= -a_1 \bar{x} + a_2 \bar{y} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= -b_1 \bar{y} + b_2 \bar{x} \end{aligned}$$

(3) $\begin{pmatrix} \frac{d\bar{x}}{dt} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_2 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -a_1-\lambda & a_2 \\ b_2 & -b_1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (-a_1-\lambda)(-b_1-\lambda) - a_2 b_2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + (a_1+b_1)\lambda + a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0$

$D = (a_1 - b_1)^2 + 4 a_2 b_2 > 0$

判別式が正なので、異なる 2 つの実数解を持つ。

$a_1 + b_1 > 0$ なので

○ $a_1 b_1 - a_2 b_2 > 0$ のとき

$\lambda_1\,,\,\lambda_2$ はともに負なので漸近安定。

○ $a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0$ のとき

$\lambda_1 = 0\,,\,\lambda_2 = -(a_1+b_1)\ (a_1 + b_1 \neq 0)$ で

固有値が縮退していないので安定。

○ $a_1 b_1 - a_2 b_2 < 0$ のとき

$\lambda_1\,,\,\lambda_2$ は一方が正なので不安定。

問題 4

(1) 斉次方程式の一般解から求める。

$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1\,,\,4$

○ $\lambda = 1$ のとき

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

○ $\lambda = 4$ のとき

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\boldsymbol{x}_n = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

特解を求める。

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_5 \\ a_6 \end{pmatrix}$$

とおく。もとの微分方程式において

(左辺)

$$\begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

(右辺)

$$\begin{pmatrix} (2a_1 + a_2)\, e^{2t} + (2a_3 + a_4)\, t + 2a_5 + a_6 \\ (2a_1 + 3a_2)\, e^{2t} + (2a_3 + 3a_4)\, t + 2a_5 + 3a_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ t \end{pmatrix}$$

係数を比較すると

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} & a_2 = -1 & a_3 = \frac{1}{4} \\ a_4 = -\frac{1}{2} & a_5 = \frac{5}{16} & a_6 = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

したがって

$$\boldsymbol{x}_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t + \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{x}_s$ が解となる。

(2) 一般解は (1) と共通。

特解を求める。

$$\boldsymbol{x}_s = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{4t} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_5 \\ a_6 \end{pmatrix}$$

とおく。もとの微分方程式において

(左辺)

$$a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} te^{4t} + \begin{pmatrix} a_1 + 4a_2 \\ 2a_1 - 4a_2 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

(右辺)

$$\begin{pmatrix} 4a_1 te^{4t} + a_2 e^{4t} + (2a_3 + a_4)\, t + 2a_5 + a_6 \\ 8a_1 te^{4t} - a_2 e^{4t} + (2a_3 + 3a_4)\, t 2a_5 + 3a_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{4t} \\ t \end{pmatrix}$$

係数を比較すると

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} & a_2 = \frac{2}{9} & a_3 = \frac{1}{4} \\ a_4 = -\frac{1}{2} & a_5 = \frac{5}{16} & a_6 = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

したがって

$$\boldsymbol{x}_s = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{4t} + \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t + \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{x}_s$ が解となる。

(3) $\begin{cases} Dx - (3D - 2)\, y = 0 \\ (D + 4)\, x - 5Dy = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 4x - 5\frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & -5 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1\, ,\, 4$$

○ $\lambda = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = O$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

○ $\lambda = 4$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = O$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

(4) 斉次方程式の一般解から求める。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + \frac{dy}{dt} = 0 \\ \frac{dx}{dt} - x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3\,,\,-1$$

○ $\lambda = 3$ のとき

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = O$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

○ $\lambda = -1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = O$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

特解を求める。

$$\begin{pmatrix} D+3 & D \\ D-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_s &= \begin{pmatrix} D+3 & D \\ D-1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{D^2 - 2D - 3} \begin{pmatrix} 1 & -D \\ -D+1 & D+3 \end{pmatrix} \times \\
&\quad \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{D^2 - 2D - 3} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{(D^2 - 3) - 2D} \frac{(D^2 - 3) + 2D}{(D^2 - 3) + 2D} \times \\
&\quad \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \\
&= -\frac{D^2 + 2D - 3}{(D^2 - 3)^2 - 4D^2} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{(D^2 - 3)^2 - 4D^2} \begin{pmatrix} 2\sin t - \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{(-1 - 3)^2 - 4(-1)} \begin{pmatrix} 2\sin t - \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2\sin t - \cos t \\ \sin t + 2\cos t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{x}_s$ が解となる。

問題 4 の補足

$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$ 型の解法

$$\text{ただし} \begin{cases} A: & 2 \times 2 \text{ の正方行列} \\ \boldsymbol{b}(t): & t \text{ を含む 2 項縦ベクトル} \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}_n = C_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$ とする。

1. $\boldsymbol{b}(t)$ の成分に $e^{\lambda_1 t}$ も $e^{\lambda_2 t}$ も入っていないとき
   （例）(1) や (4)
   $\boldsymbol{x}_s' = A\boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{b}(t)$
   $\Leftrightarrow (DE - A)\,\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{b}(t)$
   $\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_s = (DE - A)^{-1}\,\boldsymbol{b}(t)$
   から特解 $\boldsymbol{x}_s$ を求める。
2. $\boldsymbol{b}(t)$ の成分に $e^{\lambda_1 t}$ や $e^{\lambda_2 t}$ が入っているが、
   t の多項式はないとき
   （例）$\boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{pmatrix}$ など
   $\boldsymbol{x}_s = a_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} te^{\lambda_1 t} + a_2 \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$

とおいて微分方程式に代入し、

$e^{\lambda_1 t}$ の係数から a_1 , a_2 を決定する。

3. $\boldsymbol{b}(t)$ の成分に $e^{\lambda_1 t}$ や $e^{\lambda_2 t}$ が入っており、かつ t の n 次多項式が含まれているとき

   $\boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} + f\left(t\right) \\ c_2 e^{\lambda_1 t} + g\left(t\right) \end{pmatrix}$

   $f\left(t\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} k_i t^i$, $g\left(t\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} l_i t^i$

   （例）(2)

$$\boldsymbol{x}_s = \alpha_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} t e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \\ \sum_{i=0}^{n} b_i t^i \end{pmatrix}$$

   とおく。

   $e^{\lambda_1 t}$ の係数から 2 個、n 次多項式から $2n$ 個式を立てることができる。

   変数の数は α_1 , α_2 , $a_1 \sim a_n$, $b_1 \sim b_n$ の $2n+2$ 個だから、特解を求められる。