数学及力学演習 L 第 8 回（12/10） 解答

問題 1

(a) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}&=\boldsymbol{b}\times\{-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\}\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}&=\{-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\}\times\boldsymbol{a}\\&=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

(b) （$\Rightarrow$ の証明）

$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a}$ より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a})\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

（$\Leftarrow$ の証明）

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ より

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$

よって $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ は一次従属であり

$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a}$

問題 2

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}t\\-t^2\\2t+3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}t+5\\1\\-t^2\end{pmatrix}$$

(a) 公式を使った場合の解答です。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})&=\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'\\&=\begin{pmatrix}1\\-2t\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t+5\\1\\-t^2\end{pmatrix}+\\&\quad\begin{pmatrix}t\\-t^2\\2t+3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2t\end{pmatrix}\\&=-6t^2-6t+5\end{aligned}$$

(b) (a) に同じ。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=\boldsymbol{A}'\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}'\\&=\begin{pmatrix}1\\-2t\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}t+5\\1\\-t^2\end{pmatrix}+\\&\quad\begin{pmatrix}t\\-t^2\\2t+3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\-2t\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}4t^3-2\\3t^2+4t+13\\3t^2+10t+1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(c) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=-2t^3-3t^2+5t$ より

$$\begin{aligned}\int_0^1(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,dt&=\left[-\frac{1}{2}t^4-t^3+\frac{5}{2}t^2\right]_0^1\\&=1\end{aligned}$$

(d) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}t^4-2t-3\\t^3+2t^2+13t+15\\t^3+5t^2+t\end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}\int_0^1(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\,dt&=\begin{pmatrix}\left[\frac{1}{5}t^5-t^2-3t\right]_0^1\\\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3+\frac{13}{2}t^2+15t\right]_0^1\\\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{5}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-\frac{19}{5}\\\frac{269}{12}\\\frac{29}{12}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

問題 3

$\boldsymbol{a}=(x-a\,,\,y\,,\,z)$

$\boldsymbol{b}=(x\,,\,y-a\,,\,z)$

$\boldsymbol{c}=(x\,,\,y\,,\,z-c)$

これら 3 本のベクトルがなす平行六面体の体積は

$$\begin{aligned}|\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,|&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\&=\begin{pmatrix}bz\\az\\ab-ay-bx\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z-c\end{pmatrix}\\&=abz+bcx+cay-abc\\&=abc\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)\end{aligned}$$

四面体の体積は平行六面体の体積の $\dfrac{1}{6}$ なので、

$\dfrac{1}{6}\left|abc\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)-1\right|$ となる。

問題 4

(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

$$\begin{aligned}
f(\alpha,\beta)=\ &(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b})\\
&=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+\alpha^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\beta^2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-\\
&\quad 2(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{x}+2\alpha\beta\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\
&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\left(\alpha^2-\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\alpha\right)+\\
&\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\left(\beta-\frac{2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}\beta\right)+\\
&\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\\
&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\left(\alpha-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\right)^2+\\
&\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\left(\beta-\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}\right)^2+\\
&\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})^2}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}-\frac{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x})^2}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}
\end{aligned}$$

よって、$\alpha=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$, $\beta=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}$ のとき最小となる。

(b) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=1$

$\Leftrightarrow \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2=1$

$\Leftrightarrow \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\sin^2\theta=1$

$\Leftrightarrow \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\cos^2\theta=1$

$\Leftrightarrow \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=1$

$f(\alpha,\beta)=\|\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b}\|^2$ に対して

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial\alpha}=-2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b})=0\\ \frac{\partial f}{\partial\beta}=-2\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b})=0\end{cases}$$

の解が極値候補。α , β を求める。

$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}\end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\ (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\end{vmatrix}&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\\
&=\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\\
&=1
\end{aligned}$$

この α , β のとき極小値をとることを示す。

ヘッセ行列は

$$H\equiv\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & 2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|H|&=2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\,2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\
&=4\left\{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\right\}\\
&=4>0
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}&=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\\
&=2\|\boldsymbol{a}\|^2>0
\end{aligned}$$

したがって極小値となる。

問題 4(b) の補足

ヘッセ行列 $H=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$ に

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となる (x,y) を代入した行列に対して、

$$\begin{cases}|H|>0\ \text{かつ}\ f_{xx}>0 & \Rightarrow \text{極小値}\\ |H|>0\ \text{かつ}\ f_{xx}<0 & \Rightarrow \text{極大値}\\ |H|<0 & \Rightarrow \text{極値ではない}\\ |H|=0 & \Rightarrow \text{判定不能}\end{cases}$$

また

$$\begin{cases}H\ \text{の固有値がともに正} & \Rightarrow \text{極小値}\\ H\ \text{の固有値がともに負} & \Rightarrow \text{極大値}\\ H\ \text{の固有値が正と負} & \Rightarrow \text{極値ではない}\end{cases}$$