# 数学及力学演習 L 過去問解答

## 99 年度

### 問題 1

(1) $y'' + y = 0$ より、$y = e^{\pm ix}$ が一般解。
実数で表すと

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

(2) $y'' + y = \sin x$
$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$ とおいて
微分方程式に代入すると、

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \sin x \end{cases}$$

（第 1 式を仮定して第 2 式を得る）

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\sin^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x - 1) \\ C_2'(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = \frac{1}{4}(\sin 2x - 2x) + C_3 \\ C_2(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = \frac{1}{2}(\sin x \cos x - x) + C_3 \\ C_2(x) = -\frac{1}{4}\left(2\cos^2 x - 1\right) + C_4 \end{cases}$$

代入して整理すると

$$y = -\frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{4}\sin x + \sin x \cos^2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

(3)

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ &= y(0)\cos x + y'(0)\sin x \\ y'(x) &= -C_1 \sin x + C_2 \cos x \\ &= -y(0)\sin x + y'(0)\cos x \end{aligned}$$

よって

$$\begin{pmatrix} y(\lambda) \\ y'(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

(4) $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$
$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ とすると

$$\begin{aligned} &\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} \\ &= \mathrm{grad}\,(u_{1x} + u_{2y} + u_{3z}) - \mathrm{rot}\begin{pmatrix} u_{3y} - u_{2z} \\ u_{1z} - u_{3x} \\ u_{2x} - u_{1y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{1xx} + u_{2yx} + u_{3zx} \\ u_{1xy} + u_{2yy} + u_{3zy} \\ u_{1xz} + u_{2yz} + u_{3zz} \end{pmatrix} - \\ &\quad \begin{pmatrix} u_{2xy} - u_{1yy} - u_{1zz} - u_{3xz} \\ u_{3yz} - u_{2zz} - u_{2xx} - u_{1yx} \\ u_{1zx} - u_{3xx} - u_{3yy} - u_{2zy} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{1xx} + u_{1yy} + u_{1zz} \\ u_{2xx} + u_{2yy} + u_{2zz} \\ u_{3xx} + u_{3yy} + u_{3zz} \end{pmatrix} \\ &= \Delta \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

(5) ガウスの発散公式: $\iint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,dV$
成立に必要な条件：

- $S$ が**閉曲面**であること
- $V$ が $S$ の**内部領域**であること
- $V$ の内部の点全てで $\mathrm{div}\,A$ が定義されること

(6) $I(y)=\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',y'')\,dx$ とする。

ただし $y(x_1)=y_1$ , $y(x_2)=y_2$ は固定（端点）

また、$\psi(x_1)=\psi(x_2)=0$ を満たす関数 $\psi$ を使って $\mathit{\Delta} y=\varepsilon\psi$ とすると

$$\begin{aligned} I(y+\mathit{\Delta} y) &= I(y+\varepsilon\psi) \\ &\approx I(y)+\varepsilon\frac{dI}{d\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2I}{d\varepsilon^2} \quad \text{(a)} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} &\frac{dI}{d\varepsilon} \\ &=\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_1}^{x_2} F(x,y+\varepsilon\psi,y'+\varepsilon\psi',y''+\varepsilon\psi'')\,dx \\ &=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\varepsilon}F(x,y+\varepsilon\psi,y'+\varepsilon\psi',y''+\varepsilon\psi'')\,dx \\ &=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\psi+\frac{\partial F}{\partial y'}\psi'+\frac{\partial F}{\partial y''}\psi''\right)dx \end{aligned}$$

任意の $\varepsilon$ について (a) の第 2 項以降が正になるためには

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\psi+\frac{\partial F}{\partial y'}\psi'+\frac{\partial F}{\partial y''}\psi''\right)dx=0 \quad \text{(b)}$$

被積分部分について

$$\begin{aligned} \text{（第 2 項）} &= \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\psi'\,dx \\ &= -\int_{x_1}^{x_2}\psi\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx \\ \text{（第 3 項）} &= \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y''}\psi''\,dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\psi\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)dx \end{aligned}$$

より、(b) は

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2}\psi\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\}dx \\ &=0 \end{aligned}$$

これが任意の $\psi$ について成立するので

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & F_y-(F_{y'})'+(F_{y''})''=0 \end{aligned}$$

(7) (a) $F$ が $y$ によらないとき

$F_y=0$ より $-(F_{y'})'+(F_{y''})''=0$

したがって

$$F_{y'}-(F_{y''})'=\text{const.}$$

(b) $F$ が $x$ によらないとき

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[F-y'\left\{\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\}-y''\frac{\partial F}{\partial y''}\right] \\ &=\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''+\frac{\partial F}{\partial y''}y'''- \\ &\quad y''\left\{\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\}- \\ &\quad y'\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\}- \\ &\quad y'''\frac{\partial F}{\partial y''}-y''\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) \\ &=y'\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\} \\ &=0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & F-y'\left\{F_{y'}-(F_{y''})'\right\}-y''F_{y''}=\text{const.} \end{aligned}$$

**問題 2**

級数解を微分方程式に代入して

$$\left(x^2+2\right)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)\,a_n x^{n+\lambda-2}-$$
$$\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\,a_n x^{n+\lambda-1}-6\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda}=0$$
$$\Leftrightarrow\ \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\lambda^2+(2n-1)\lambda+n(n-1)-6\right\}a_n x^{n+\lambda}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(2\lambda+2n-3)(n+\lambda)\,a_n x^{n+\lambda-1}=0$$

次数ごとに $x$ の係数を比較すると

$x^{\lambda-1}$ の係数:

$0+(2\lambda-3)\,\lambda a_0=0 \quad$ (a)

$x^{\lambda}$ の係数:

$\left(\lambda^2-\lambda-6\right)a_0+(2\lambda-1)(\lambda+1)\,a_1=0 \quad$ (b)

$x^{\lambda+1}$ の係数:

$\left(\lambda^2+\lambda-6\right)a_1+(2\lambda+1)(\lambda+2)\,a_2=0 \quad$ (c)

$\cdots$

(1) $a_0=1$ と (a) から

$$(2\lambda-3)\,\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=0\,,\ \frac{3}{2}$$

(2) (i) $\lambda=0$ のとき

(b)、(c) より $a_1=-6\,,\ a_2=-18$

(ii) $\lambda=\dfrac{3}{2}$ のとき

(b)、(c) より $a_1=\dfrac{21}{20}\,,\ a_2=-\dfrac{189}{1120}$

**問題 3**

(1)

$$\operatorname{grad}G=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
$$\operatorname{div}\operatorname{grad}G=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{3}{\|\boldsymbol{x}\|^5}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{3}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\right\}=0$$

(2)

$$\begin{aligned}\int\operatorname{grad}G\cdot d\boldsymbol{S}&=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot d\boldsymbol{S}\\&=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,dS\\&=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r^2}\,dS\\&=-1\end{aligned}$$

(3) (a) 原点が含まれていないとき

(1) の結果から

$$\int_S\operatorname{grad}G\cdot d\boldsymbol{S}=\int_D\operatorname{div}\operatorname{grad}G\,d\boldsymbol{x}^3=0$$

(b) 原点が含まれているとき

(2) の結果から

$$\int_D\operatorname{div}\operatorname{grad}G\,d\boldsymbol{x}^3=\int_S\operatorname{grad}G\cdot d\boldsymbol{S}=-1$$

よって、

$$\int_D\operatorname{div}\operatorname{grad}G\,d\boldsymbol{x}^3=\int_S\operatorname{grad}G\cdot d\boldsymbol{S}=-\int_D\delta(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x}^3$$

**問題 4**

$J=\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}G(t,x,\dot{x},y,\dot{y})\,dt=C$ **という条件で**

$x,y$ **が**$I=\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}F(t,x,\dot{x},y,\dot{y})\,dt$ **の**

**停留曲線となるための条件は、**

$H=\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}(F+\lambda G)\,dt$ **の**

**停留曲線となることである。**

**すなわち**

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial\dot{x}}\right\}-\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial x}=0\,,$$
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial\dot{y}}\right\}-\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y}=0$$

これを利用する。

$$J = \int_0^1 (y-x)\,dt$$
$$I = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) - y \right\} dt$$
$$H = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) - y + \lambda\,(y-x) \right\} dt$$

これをもとにオイラーの微分方程式を考える。

1. $x$ について

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\dot{x}) + \lambda = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda \\ \Leftrightarrow\ &x = -\frac{1}{2}\lambda\,t^2 + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

初期条件から $C_1 = \frac{1}{2}\lambda - 1\,,\, C_2 = 1$ で

$$x(t) = -\frac{1}{2}\lambda\,t^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1\right)t + 1$$

2. $y$ について

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\dot{y}) - (-1+\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{d^2y}{dt^2} = \lambda - 1 \\ \Leftrightarrow\ &y = \frac{1}{2}(\lambda-1)\,t^2 + C_3\,t + C_4 \end{aligned}$$

初期条件から $C_3 = -\frac{1}{2}(\lambda+1)\,,\, C_4 = 1$ で

$$y(t) = \frac{1}{2}(\lambda-1)\,t^2 - \frac{1}{2}(\lambda+1)\,t + 1$$

束縛条件 $x - y = 0$ より $\lambda = \frac{1}{2}$ となるので、

$$x(t) = y(t) = -\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{4}t + 1$$

## 00 年度

### 問題 1

(1) $y'' + 2y' = 0$ を解く。
$y = e^{\lambda x}$ を代入すると

$$\begin{aligned} &\lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\lambda^2 + 2\lambda = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\lambda = 0\,,\,-2 \end{aligned}$$

よって斉次方程式の一般解は

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x}$$

$C_1 \to C_1(x)\,,\, C_2 \to C_2(x)$ として
$y'' + 2y' + 2 = 0$ に代入すると、

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\,e^{-2x} = 0 \\ C_2'(x) = e^{2x} \end{cases}$$

（第 1 式を仮定して第 2 式を得る）

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -x + C_1 \\ C_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C_2 \end{cases}$$

したがって、求める一般解は

$$y = -x + C_2 e^{-2x} + C$$

(2)
$$\vec{e_\rho} + \rho\vec{e_\phi} = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\left(\vec{e_\rho} + \rho\vec{e_\phi}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho} \\ \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) $t$ の項が入っていないときの
オイラーの微分方程式より、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - u - \frac{du}{dt}\frac{\partial}{\partial u'}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - u\right\}$$
$$= C_1'$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2u = C_1$$
$$\Leftrightarrow \frac{du}{dt} = \pm\sqrt{C_1 - 2u}$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{du}{\sqrt{C_1 - 2u}} = \pm\int dt$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{C_1 - 2u} = \mp t + C_2$$
$$\Leftrightarrow u(t) = \frac{1}{2}\left\{C_1 - (\mp t + C_2)^2\right\}$$

初期条件（ここでは $u(1) = 0$ と定めた）より
$C_1 = \frac{1}{4}$, $C_2 = \pm\frac{1}{2}$ となるので、

$$u(t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right\}$$
$$= -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$$

**問題 2**

(1)
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

とすると

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1, 3$$

(a) $\lambda = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) $\lambda = 3$ のとき

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$\boldsymbol{x} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$\boldsymbol{y}$ についても同様にして求める。

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

とすると

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

(a) $\lambda = i$ のとき

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) $\lambda = -i$ のとき

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$\boldsymbol{y} = C_1\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} e^{it} + C_2\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it}$$

(2)
$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

とすると

$$\begin{cases} \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \\ \lambda\begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \lambda^2\begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

以下、(1) と同様にする。

$$\det\begin{pmatrix} \lambda^2+5 & 4 \\ 4 & \lambda^2+5 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2+5\right)^2 - 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2+9\right)\left(\lambda^2+1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \pm 3i, \pm i$$

(a) $\lambda^2 = -9$ のとき

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\lambda^2 = -1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

先述の方程式から $v_3$ , $v_4$ を計算して

$$\boldsymbol{z} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} e^{3it} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix} e^{-3it} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} e^{it} + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \\ i \end{pmatrix} e^{-it}$$

**問題 3**

(1) 第 2 回テストの問題 2(2) と同じなので省略。

(2) ガウスの発散定理を利用する。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= \left(3x^2 + z\right) + \left(2yz - x^2\right) + \left(2y^2\right) \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2yz + z \end{aligned}$$

ここで座標系を「円柱座標系」になおす。
すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

求める値は

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{B}\, dV$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(2\rho^2 + 2\rho\sin\theta z + z\right) \rho\cos^2\theta \, d\rho\, d\theta\, dz$$

($\rho\cos^2\theta$はヤコビアン)

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \left[\frac{1}{2}\rho^4 + \frac{2}{3}\rho^3 \sin\theta z + \frac{1}{2}\rho^2 z\right]_0^2 d\theta\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \left(8 + \frac{16}{3}\sin\theta z + 2z\right) d\theta\, dz$$

$$= \int_0^1 \left\{ (8+2z) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\, d\theta + \frac{16}{3} z \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta \right\} dz$$

$$= \int_0^1 \left\{ (8+2z) \left[\frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} + \frac{16}{3} z \left[-\frac{1}{3}t^3\right]_1^1 \right\} dz$$

(2 項目では、$\cos\theta = t$ と置換した)

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (8+2z)\,\pi\, dz \\ &= \pi\left[8z + z^2\right]_0^1 \\ &= \pi\,(8+1) \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

(3) 第 10 回の問題 5 と同じなので省略。

**問題 4**

第 12 回の問題 3 と同じなので省略。