00 年度第二回中間試験

問題 1　次の連立微分方程式の一般解を求め、原点のまわりの安定性を調べよ。

(1) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$

(2) $\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X$

問題 2　t に関するベクトル関数 $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{c}(t)$ について、以下の問に答えよ。

(1) $(\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t))' = \mathbf{a}'(t) \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}'(t)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 任意の t に対して、$\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{c}(t)$ が常に単位ベクトルであり互いに直行しているならば、以下の方程式が成り立つことを証明せよ。

$$\begin{cases} \mathbf{a}'(t) = & & -\lambda_3(t)\mathbf{b}(t) & -\lambda_2(t)\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{b}'(t) = & -\lambda_3(t)\mathbf{a}(t) & & \lambda_1(t)\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{c}'(t) = & \lambda_2(t)\mathbf{a}(t) & -\lambda_1(t)\mathbf{b}(t) & \end{cases}$$

問題 3　ベクトル場 $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ が以下の 4 つの方程式を満たしているとする。このとき、以下の問に答えよ。

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

(1) $\operatorname{rot} \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ ならびに、$\operatorname{rot} \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mu_0 \dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

(2) $\epsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial^2_{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = \triangle \mathbf{H}$ ならびに $\epsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \triangle \mathbf{E}$ を証明せよ。
ただし、$\triangle$ は Laplacian$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^e} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ を意味する。

問題 4

(1) 原点を中心とする半径 1 の球面 $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ を閉曲面 S_1, $(2, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面 $((x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1)$ を閉曲面 S_2 とするとき、面積分 $\displaystyle\iint_{S_1} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S}$ ならびに、面積分 $\displaystyle\iint_{S_2} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ。

(2) 楕円体の上半分 $(x^2 + y^2 + 3z^2 = 1, z \geq 0)$ を曲面 S とする。このとき、$\mathbf{a} = (2x^2 - xy, x - y^2, xz + z^2)$ に関する $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ。

99 年度期末試験

問題 1

(1) $y'' + y = 0$ の一般解を求めよ。

(2) $y'' + y = \sin x$ の一般解を求めよ。

(3) (1) の解について、線形写像 $A : (y(0), y'(0)) \mapsto (y(\lambda), y'(\lambda))$ を表す行列を求めよ。

(4) $\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{u}$ を示せ。

(5) ガウスの発散公式の成立に必要な条件をできるだけ正確に書け。

(6) $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')dx$ の Euler-Lagrange 方程式 (Euler) 方程式を求めよ。

(7) (6) で求めた Euler-Lagrange 方程式につき、F が y によらなければ $F_{y'} - (F'_{y''}) = \text{const.}$ が第一積分となることをしめせ。また、F が x によらなければ、$F - y'(F_{y'} - (F_{y''})') - y''F_{y''} = \text{const.}$ が第一積分となることを示せ。

問題 2　微分方程式

$$(x^2 + 2)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

を $x = 0$ のまわりで展開した級数解で解くことを考えよう。級数解の形を

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{ただし、} a_0 = 1$$

とおいて、以下の問に答えよ。

(1) 級数解の形を微分方程式に代入して λ の値を決定せよ。今の場合、二階の微分方程式なので λ は二つ出てくることに注意せよ。

(2) 上で求めたそれぞれの λ に関して、級数解の初めの三項を求めよ。すなわち、係数 a_1, a_2 を求めよ ($a_0 = 1$ は与えられている)。

問題 3　$G(\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{\|\vec{x}\|}$ とする。ただし、$\vec{x} \in \mathbb{R}^{\nvDash}$ である。以下の問に答えよ。極座標表示で答えても良い。

(1) $\operatorname{grad} G$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} G$ を求めよ。

(2) 原点を中心とする半径 r の球面上で $\displaystyle\int \operatorname{grad} G \cdot d\vec{S}$ を求めよ。

(3) 適当な単連結領域を D とする。G は、原点においてガウスの発散公式を適用するための用件を満たしていない。しかし、δ 関数 (積分したときに、原点が積分領域に含まれれば 1、そうでなければ 0 となるように "関数"。原点以外では $\delta(x) = 0$ である。) の利用を認めるならば、$\operatorname{div}\operatorname{grad} G = -\delta(\vec{x})$ とおくことで、あたかもガウスの発散公式が適用可能であるかのように取り扱うことができる。このことを $\displaystyle\int_D \operatorname{div}\operatorname{grad} G(\vec{x}) d\vec{x}^3 = \int_S \operatorname{grad} G(\vec{x}) \cdot d\vec{S}$ について確かめよ。ただし、S は D の "ふち" である。

問題 4　x, y を変関数とする積分汎関数

$$I[x,y] = \int_0^1 dt \left\{ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right) - y \right\}$$

の、拘束条件 $y - x = 0$ のもとでの停留曲線 x, y を求めよ。ただし、$x(0) = y(0) = 1$, $x(1) = y(1) = 0$ とする。

00 年度期末試験

問題 1　次の各問に答えよ。

(1) 微分方程式 $y'' + 2y' + 2 = 0$ の一般解を求めよ。

(2) ベクトル場 $\vec{e_\rho} + \rho\vec{e_\phi}$ の回転を求めよ。ただし、$\vec{e_\rho}$, $\vec{e_\phi}$ は円柱座標系 (ρ, ϕ, z) における動径方向、方位角方向に対する単位ベクトルである。

(3) 積分汎関数

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - u \right\}$$

の停留曲線を求めよ。ただし、停留曲線は $u(0) = 0$ を満たし、$t = 1$ での値は自由に変化しうるとする。

問題 2　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$ 及び $\dfrac{d\vec{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}$

(2) $\dfrac{d\vec{z}}{dt} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{z}$

問題 3

(1) ベクトル場 $\mathbf{A} = (x^2 + yz, y^2 + zx, z^2 + xy)$ のポテンシャル U ($\mathbf{A} = -\mathrm{grad}\, U$ を満たすスカラー場) を求めよ。

(2) 円柱 $\left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 2\right\}$ の表面を S とする。このとき、$\mathbf{B} = (x^3 + xz, y^2 z - x^2 y, 2zy^2)$ に対する面積分 $\displaystyle\int_S \mathbf{B} \cdot d\vec{S}$ を計算せよ。

(3) xy 平面上の単一閉曲線 C とその内部領域 D に対して、

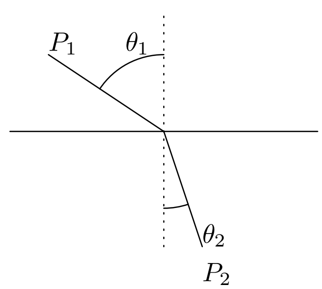
$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

が成り立つことを示せ。ただし、$P(x, y)$ と $Q(x, y)$ は、一回連続微分可能な汎関数とする。

問題 4　Fermat の定理によれば、光線の経路は時間が最小となるような路となる。$P_1 = (x_1, y_1)$ から $P_2 = (x_2, y_2)$ に到達する光線について、以下の問に答えよ。

(1) 光の速度が V_0 で一定としたとき、光線の経路を変分法により求めよ。
ヒント: $\displaystyle\int dt = \int \frac{dr}{V_0}$

(2) $\{(x, y)|y \geq 0\}$ での光の速度を V_1, $\{(x, y)|y < 0\}$ での光の速度を V_2 とする。$y_1 > 0, y_2 < 0$ としたとき、x 軸上にある入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 との間に、Snell の法則 $\dfrac{\sin\theta_1}{V_1} = \sin\dfrac{\theta_2}{V_2}$ が成り立つことを Lagrange の未定乗数法により示せ。



(3) 光の速さを $V = V_0(1 - \alpha_y)$ とする。(ただし、$\alpha \ll 1$)。$y_1 = y_2 > 0$ としたとき、光線の経路を変分法により求めよ。

Typeset by $\mathcal{AMS}$-LaTeX